

La Transformée de Hough, nouvelle approche.

A. Diou, Y. Voisin¹, C. Santo

Laboratoire G.E.R.E.

12, rue de la fonderie - 71200 Le Creusot - France

Tel : 85-80-30-30 ; Fax : 85-80-36-15, E-mail : a.diou@gere.u-bourgogne.fr

Résumé

La transformée de Hough connaît actuellement un intérêt grandissant grâce à ses capacités de recherche des paramètres de formes diverses dans une image ou un signal. Citons, par exemple, la recherche des paramètres de droites, de cercles, ou plus généralement de coniques. Nous présentons ici une approche analytique permettant de calculer la transformée de Hough théorique pour des images standards, dans le cas de la recherche de droites.

1. Introduction

La transformation de Hough a été initialement introduite par Hough [8] pour détecter des alignements de points. Plus généralement, suite aux travaux de Duda et Hart [5], on désigne par transformation de Hough une méthode permettant de repérer une forme géométrique dans une image. Cette méthode a fait l'objet d'un nombre important de travaux, aussi bien du point de vue théorique, du point de vue de sa formulation, que d'un point de vue industriel pour ses applications en reconnaissance de forme. Parmi les auteurs ayant contribué à généraliser la transformation de Hough, nous pouvons citer Illinworth et Kittler [9] et Maitre [12] [13] [14]. Ce dernier a donné une définition générale que l'on peut résumer comme suit :

Considérons un ensemble de N points sélectionnés. Chaque point est repéré par ses coordonnées dans un espace à n dimensions. Supposons que l'on recherche une famille de courbes pouvant être paramétrées par au plus p paramètres. On appelle Transformée de Hough associée à cette famille de courbes, une transformation faisant correspondre une de ces courbes repérée par la valeur particulière des paramètres à l'ensemble des points identifiés par leurs coordonnées.

2. Transformée de Hough et Transformée de Radon

La transformée de Hough associe la description observée $I(x,y)$ d'une image à sa description $\tilde{I}(a_1, a_2, \dots, a_p)$ dans l'espace des paramètres. Cette transformation peut être abordée à l'aide de deux

approches : une approche discrète et une approche intégrale continue.

2.1 Méthode discrète

La méthode discrète consiste à décomposer l'espace de Hough (l'espace des paramètres a_1, a_2, \dots, a_p) en un nombre fini de pavés élémentaires auxquels on associe un compteur. Pour chaque point (x,y) de l'image, on parcourt la courbe transformée dans l'espace de Hough. Chaque fois que l'on pénètre dans un des pavés, on incrémente le compteur correspondant. Si l'on veut une bonne précision, il faut choisir un nombre important d'éléments dans l'espace de Hough, ce qui entraîne un nombre très important de calculs. Cette approche rend difficile l'obtention d'une expression analytique exploitable de la transformée d'une image simple, ce qui a été tenté par Lopez et Pousset [11]. Afin de réduire le temps de calcul, des approches probabilistes de la transformée ont été proposées, parmi lesquelles une étude comparative faite par Kalvianen et al. [10].

2.2 Méthode intégrale

La forme géométrique recherchée impose une relation entre les coordonnées (x,y) des points de l'image et les paramètres (a_1, a_2, \dots, a_p) de la forme. Les points de l'image dont les coordonnées (x,y) respectent cette relation forment une région \mathcal{R} de l'image. Soit $\pi(x,y, a_1, a_2, \dots, a_p)$ l'indicatrice de cette région définie comme suit :

$$\pi(x,y, a_1, a_2, \dots, a_p) = 1 \quad \text{si } (x,y) \in \mathcal{R},$$

$$\pi(x,y, a_1, a_2, \dots, a_p) = 0 \quad \text{sinon.}$$

Quand la forme recherchée est une ligne, la relation décrivant cette forme est

$$f(x,y, a_1, a_2, \dots, a_p) = 0. \quad \{E1\}$$

L'indicatrice de la région où cette relation est vérifiée est la distribution de Dirac

$$\pi(x,y, a_1, a_2, \dots, a_p) = \delta(f(x,y, a_1, a_2, \dots, a_p)). \quad \{E2\}$$

Soit l'image $I(x,y)$, la transformée de Hough $\tilde{I}(a_1, a_2, \dots, a_p)$ de cette image, pour la recherche de la forme de paramètres (a_1, a_2, \dots, a_p) est donnée par l'intégrale suivante :

¹ membre CIPPRS n° 950680

$$\tilde{I}(a_1, a_2, \dots, a_p) = \iint I(x, y) \delta(f(x, y, a_1, a_2, \dots, a_p)) dx dy. \quad \{E3\}$$

On reconnaît à la relation {E3} la transformée de Radon qui a été mise en relation avec la transformée de Hough par Deans [2]. Cette forme de la transformée de Hough a permis de concevoir des processeurs optiques qui ont été proposés par Eichmann et Dong [6] en optique cohérente, puis Gindi et Gmitro [7] en optique incohérente et finalement par différentes équipes ([1],[15] et [17]).

Dans cette étude, notre contribution porte essentiellement sur deux points :

- un nouveau mode de représentation des droites, qui préserve la linéarité des relations utilisées ;
- une approximation de la distribution de Dirac, qui permet le calcul théorique de la transformée de Hough sur des images élémentaires.

3. Représentation des droites

3.1 Représentations classiques d'une droite

Nous allons restreindre l'étude de la Transformation de Hough dans son but premier qui est la détection de droites. Cette transformation consiste à associer à chaque point défini dans un système de coordonnées, un ensemble de paramètres définissant les droites. Cependant la paramétrisation des droites dépend de leur mode de représentation. Une représentation classique est la représentation cartésienne. A un ensemble de points $P(x,y)$ vérifiant l'équation $y = ax + b$, on associe un point dans l'espace de Hough de coordonnées (a,b) . Réciproquement à un point de coordonnées (x,y) , on associe une droite dans l'espace de Hough définie par les points (a,b) tels que on ait $b = -ax + y$. Une technique de recherche d'alignement consiste alors à associer à chaque point de l'image une droite dans l'espace de Hough. L'intersection de ces droites donnera le point (a_0, b_0) correspondant aux paramètres de la droite recherchée dans l'image.

Une image correspond à une portion limitée du plan. Les coordonnées de chaque point de l'image sont comprises entre deux bornes. A l'opposé, les paramètres cartésiens de la droite (a : pente de la droite et b : ordonnée à l'origine) se situent dans une portion non bornée du plan. En particulier on ne peut pas décrire les droites verticales (de pente infinie) dans la représentation cartésienne.

Une paramétrisation basée sur une représentation polaire peut être envisagée. Une droite située à une distance ρ de l'origine et inclinée d'un angle θ sera représentée par le point (ρ, θ) dans l'espace de Hough.

L'image est limitée au domaine $((0, x_{\max}), (0, y_{\max}))$ et sa transformée est limitée au domaine $((0, \rho_{\max}), (0, \pi))$. Chaque point de l'image (x,y) est transformé en une sinusoïde de l'espace de Hough (ρ, θ) . Par accumulation des sinusoïdes correspondant à tous les points de l'image, on trouve les maxima correspondant aux droites principales de l'image. Le mode de représentation polaire des droites permet de décrire toutes les droites de l'image dans une portion bornée de l'espace des paramètres mais conserve la propriété de la non linéarité de la Transformation de Hough.

3.2 Représentation implicite

Pour décrire toutes les droites de l'image dans une portion bornée de l'espace des paramètres tout en conservant la propriété de linéarité de la transformée, on utilise une représentation implicite de la droite. Une droite de l'image peut être décrite par la relation

$$f(x,y,a,b) = 0 \text{ avec } f(x,y,a,b) = ax + by + c.$$

Cette relation à deux degrés de liberté contient trois paramètres, mais a, b, c sont choisis tel que

$$|a| + |b| + |c| = 1.$$

En explorant les huit domaines déterminés par les signes pris par les paramètres, nous obtenons des symétries dans la transformée. La transformée d'une droite de l'image est un ensemble de quatre points de l'espace des paramètres. Or, il suffit d'un seul point dans l'espace de Hough pour caractériser une droite. Nous éliminerons la moitié des points redondants en choisissant de prendre uniquement les valeurs positives de c . Une droite est alors décrite par la relation implicite :

$$f(x,y,a,b) = 0 \text{ avec } f(x,y,a,b) = ax + by - |a| - |b| + 1. \quad \{E4\}$$

3.3 Transformée d'un point

Réciproquement, en fixant les coordonnées (x_0, y_0) la relation {E4} est l'équation d'une droite dans l'espace (a,b) , plus exactement l'équation de 4 droites, étant donné la présence de valeurs absolues de a et de b . En normalisant la taille de l'image à un carré centré de côté unité, les coordonnées x_0 et y_0 sont comprises dans l'intervalle $[-1/2, +1/2]$. Les valeurs de a et b sont alors limitées par les relations :

$$|a| + |b| - 2/3 > 0 \text{ et } |a| + |b| - 2 < 0.$$

Sur la figure 1, la transformée du point (x_0, y_0) dans l'espace (x,y) est le quadrilatère dessiné en gras dans l'espace (a,b) .

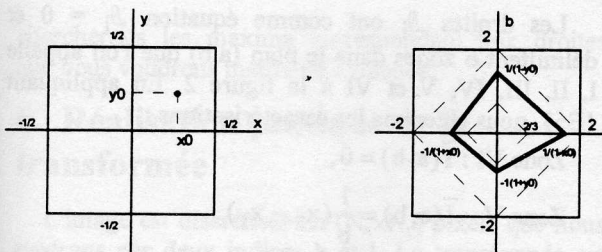


Figure 1. Transformée d'un point.

4. Forme intégrale de la transformée de Hough

Ayant défini la relation $f(x,y,a,b)$ permettant de décrire les droites dans l'image, il nous reste à traiter l'intégrale définissant la transformée de Radon.

4.1 Approximation de l'intégrale proposée

La présence de la distribution de Dirac dans l'intégrale ne facilite pas le calcul explicite de $\tilde{I}(a,b)$. Nous cherchons une approximation exploitable de la distribution de Dirac et pour ce faire, nous considérons :

$$\text{- que } \delta(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2|x|}{dx^2},$$

- que $|x|$ peut être décrit par le diagramme asymptotique de Bode d'un filtre polynomial coupe-bande d'ordre n ,

- que le module de la fonction de transfert de ce filtre se confond avec les asymptotes quand l'ordre n tend vers l'infini.

Nous calculons alors ce module. En définitive, nous proposons l'approximation suivante :

$$\delta(f(x,y,a,b)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n e^{4nf(x,y,a,b)}}{(1 + e^{4nf(x,y,a,b)})^2}.$$

On écrit la transformée de Hough sous la forme suivante :

$$\tilde{I}(a,b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint I(x,y) \frac{4n e^{4nf(x,y,a,b)}}{(1 + e^{4nf(x,y,a,b)})^2} dx dy.$$

Pour des droites et en utilisant la relation {E4} on obtient la relation

$$\tilde{I}(a,b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint I(x,y) \frac{4n e^{4n(ax+by-|a|-|b|+1)}}{(1 + e^{4n(ax+by-|a|-|b|+1)})^2} dx dy.$$

5. Applications à des images simples

L'image est un rectangle, formé de la juxtaposition d'éléments : les pixels, eux-mêmes rectangulaires. Calculons donc la transformée de Hough pour une image rectangulaire de niveau de gris uniforme.

5.1 Transformée d'un rectangle de niveau de gris uniforme

Cherchons la transformée d'une image formée d'un rectangle blanc uniforme (niveau de gris = 1) sur un fond noir (niveau de gris=0) et de coordonnées $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$. Dans ce cas

$$\tilde{I}(a,b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{4n e^{4n(ax+by-|a|-|b|+1)}}{(1 + e^{4n(ax+by-|a|-|b|+1)})^2} dy.$$

Si on pose

$$u = e^{4n(ax+by-|a|-|b|+1)},$$

$$u_{y_1} = e^{4n(ax+by_1-|a|-|b|+1)},$$

$$u_{y_2} = e^{4n(ax+by_2-|a|-|b|+1)},$$

alors

$$\tilde{I}(a,b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{u_{y_1}}^{u_{y_2}} \frac{du}{(1+u)^2},$$

$$\tilde{I}(a,b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{1}{1+u_{y_1}} - \frac{1}{1+u_{y_2}} \right].$$

Si on note

$$u_{x_1 y_1} = e^{4n(ax_1+by_1-|a|-|b|+1)},$$

$$u_{x_2 y_1} = e^{4n(ax_2+by_1-|a|-|b|+1)},$$

$$u_{x_1 y_2} = e^{4n(ax_1+by_2-|a|-|b|+1)},$$

$$u_{x_2 y_2} = e^{4n(ax_2+by_2-|a|-|b|+1)},$$

on obtient que

$$\tilde{I}(a,b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4nab} \ln \left[\frac{1+u_{x_1 y_1}}{u_{x_1 y_1}} \cdot \frac{u_{x_2 y_1}}{1+u_{x_2 y_1}} \cdot \frac{1+u_{x_2 y_2}}{u_{x_2 y_2}} \cdot \frac{u_{x_1 y_2}}{1+u_{x_1 y_2}} \right].$$

En remplaçant les u_{xy} par leur expression, en simplifiant, et en notant

$$\begin{aligned} \delta_1 &= ax_1 + by_1 - |a| - |b| + 1, \\ \delta_2 &= ax_1 + by_2 - |a| - |b| + 1, \\ \delta_3 &= ax_2 + by_1 - |a| - |b| + 1, \\ \delta_4 &= ax_2 + by_2 - |a| - |b| + 1, \end{aligned}$$

alors $\tilde{I}(a, b)$ s'écrit

$$\tilde{I}(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4nab} \text{Ln} \left[\frac{(1 + e^{4n\delta_1}) (1 + e^{4n\delta_4})}{(1 + e^{4n\delta_3}) (1 + e^{4n\delta_2})} \right].$$

On a les cas suivants, lorsque $n \rightarrow \infty$

a) si $\delta_i > 0 \Rightarrow e^{4n\delta_i} \rightarrow \infty \Rightarrow (1 + e^{4n\delta_i}) \approx e^{4n\delta_i}$

$$\Rightarrow \text{Ln}(1 + e^{4n\delta_i}) \approx 4n\delta_i,$$

b) si $\delta_i < 0 \Rightarrow e^{4n\delta_i} \rightarrow 0 \Rightarrow (1 + e^{4n\delta_i}) \approx 1$

$$\Rightarrow \text{Ln}(1 + e^{4n\delta_i}) \approx 0.$$

Introduisons la fonction

$$\text{Pos}(\delta_i) = \delta_i \text{ si } \delta_i \geq 0, \text{ Pos}(\delta_i) = 0 \text{ sinon,}$$

alors

$$\tilde{I}(a, b) = \frac{1}{ab} (\text{Pos}(\delta_4) - \text{Pos}(\delta_3) - \text{Pos}(\delta_2) + \text{Pos}(\delta_1)).$$

{E5}

On constate que si les δ_i sont tous négatifs, alors $\tilde{I}(a, b)$ est nul et si les δ_i sont tous positifs, alors $\tilde{I}(a, b)$ est nul puisque la relation $\delta_4 - \delta_3 - \delta_2 + \delta_1 = 0$ est vérifiée.

A la figure 2 on représente la transformée d'un rectangle en nous restreignant au domaine $a > 0$ et $b > 0$.

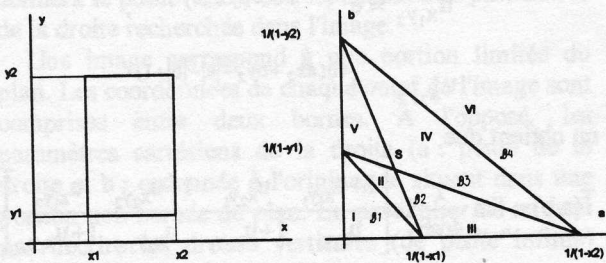


Figure 2 : transformée d'un rectangle.

Les droites δ_i ont comme équation $\delta_i = 0$ et délimitent 6 zones dans le plan (a, b) que l'on appelle I, II, III, IV, V et VI à la figure 2. En appliquant {E5}, nous obtenons les caractérisations :

Zone VI : $\tilde{I}(a, b) = 0,$

Zone V : $\tilde{I}(a, b) = \frac{1}{b}(x_2 - x_1),$

Zone IV : $\tilde{I}(a, b) = \frac{1}{ab}(a(x_2 - 1) + b(y_2 - 1) + 1),$

Zone III : $\tilde{I}(a, b) = \frac{1}{a}(y_2 - y_1),$

Zone II : $\tilde{I}(a, b) = -\frac{1}{ab}(a(x_1 - 1) + b(y_1 - 1) + 1),$

Zone I : $\tilde{I}(a, b) = 0.$

Si on note S le point d'intersection des droites δ_2 et δ_3 , alors $S = (a_s, b_s)$ a comme coordonnées

$$a_s = \frac{y_2 - y_1}{(x_1 - 1)(y_1 - 1) - (x_2 - 1)(y_2 - 1)},$$

$$b_s = \frac{x_2 - x_1}{(x_1 - 1)(y_1 - 1) - (x_2 - 1)(y_2 - 1)}.$$

La transformée en ce point prend comme valeur

$$\tilde{I}(a_s, b_s) = (x_1 - 1)(y_1 - 1) - (x_2 - 1)(y_2 - 1).$$

Prenant pour x_1, x_2, y_1 et y_2 les valeurs correspondantes aux quatre coins d'une image, nous obtenons ainsi la transformée de Hough d'une image uniforme, que nous présentons à la figure 3. Nous observons quatre maxima marqués.

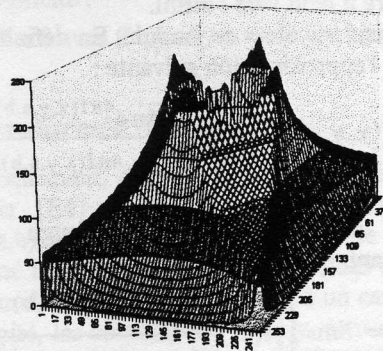


Figure 3. Transformée de Hough d'une image uniforme

Nous mettons en oeuvre la transformée de Hough pour déterminer les paramètres des droites de l'image. Ceux-ci sont donnés par les coordonnées des maxima de la transformée. Nous devons tenir compte de la présence des quatre maxima dus à la transformation des points non alignés dans l'image, quand nous

chercherons les maxima correspondant aux droites que nous voudrions mettre en évidence.

6. Réalisation pratique de la transformée

L'image est discrétisée en $(N_x \times N_y)$ pixels que nous repérons par deux indices k et l . La transformée est discrétisée en $(N_a \times N_b)$ pixels que nous repérons par deux indices m et n . La discrétisation de l'image est généralement imposée par le dispositif de prise de vue, par contre la discrétisation de la transformée peut être aussi fine qu'on le souhaite, le domaine de variation de a et b , ainsi que le nombre $(N_a \times N_b)$ de « pixels » dans l'espace de Hough est laissé à la discrétion de l'utilisateur. Pour calculer la transformée, on considère l'image comme étant la juxtaposition de pixels de niveau de gris uniforme, ce qui nous permet d'utiliser les relations établies pour un rectangle.

Appelons Π_{kl} l'indicatrice de la région

$$\left(x \in \left[x_k - \frac{\Delta x}{2}, x_k + \frac{\Delta x}{2} \right]; y \in \left[y_l - \frac{\Delta y}{2}, y_l + \frac{\Delta y}{2} \right] \right)$$

Si on considère que le niveau de gris est constant sur le pixel, alors l'image peut s'écrire

$$I(x, y) = \sum_k \sum_l I(x_k, y_l) \Pi_{kl}.$$

Par suite de la linéarité de la transformée, la transformée de Hough de l'image s'écrit

$$\tilde{I}(a, b) = \sum_k \sum_l I(x_k, y_l) \tilde{\Pi}(k, l, a, b), \{E6\}$$

avec

$$\tilde{\Pi}(k, l, a, b) = \frac{1}{ab} (\text{Pos}(\mathcal{D}_4) - \text{Pos}(\mathcal{D}_3) - \text{Pos}(\mathcal{D}_2) + \text{Pos}(\mathcal{D}_1))$$

$$\mathcal{D}_1 = a \left(x_k - \frac{\Delta x}{2} \right) + b \left(y_l - \frac{\Delta y}{2} \right) - |a| - |b| + 1,$$

$$\mathcal{D}_2 = a \left(x_k - \frac{\Delta x}{2} \right) + b \left(y_l + \frac{\Delta y}{2} \right) - |a| - |b| + 1,$$

$$\mathcal{D}_3 = a \left(x_k + \frac{\Delta x}{2} \right) + b \left(y_l - \frac{\Delta y}{2} \right) - |a| - |b| + 1,$$

$$\mathcal{D}_4 = a \left(x_k + \frac{\Delta x}{2} \right) + b \left(y_l + \frac{\Delta y}{2} \right) - |a| - |b| + 1.$$

On obtient ainsi une première approche du calcul de la Transformée de Hough destinée à repérer des alignements dans une image.

La forme proposée ici permet de travailler sur des images à niveau de gris, ce qui a été suggéré par Rong et Wen [16]. Chaque pixel de l'image doit être pris en compte, ce qui alourdit le temps de calcul. Le calcul de la transformée sur une image binarisée permet d'ignorer les pixels de niveau de gris inférieur au seuil de binarisation. Ce dernier est calculé par la méthode de la conservation des moments statistiques de Wen Hsiang Tsai [18]. La sommation de l'expression $\{E6\}$ ne porte alors que sur les pixels d'indice (k, l) tels que $I(x_k, y_l) > \text{seuil}$.

7. Exemple

A titre d'exemple, cherchons les droites dans l'image "bureau" présentée à la figure 4. Il s'agit de repérer les contours des meubles et des fenêtres situés dans l'image.

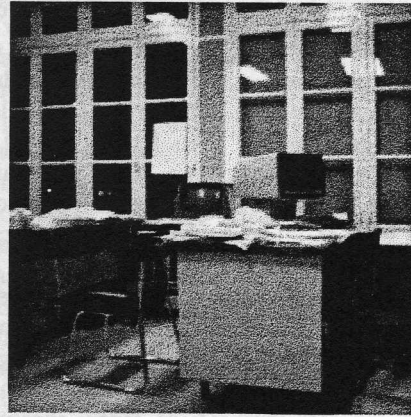


Figure 4. Image "bureau"

Nous avons premièrement établi l'image contour à l'aide du gradient de Roberts, que nous avons ensuite binarisée (figure 5). Dans une application réelle, il est préférable d'utiliser un détecteur de contour plus performant, comme par exemple celui de Canny-Deriche [3]. Nous avons appliqué l'algorithme décrit précédemment pour les points noirs marquant les contours.

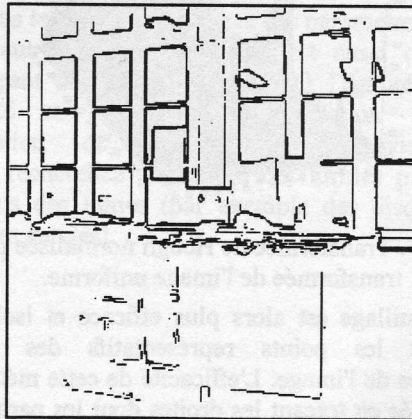


Figure 5. Image contour de l'image bureau.

La transformée de Hough de l'image contour est présentée à la figure 6. Il y apparaît des maxima dont les coordonnées sont les paramètres des droites de l'image.

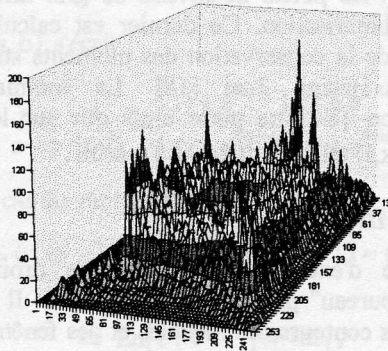


Figure 6. Transformée de Hough de l'image contour.

Une méthode simple de détection des maxima consiste à prendre en compte les points dont la valeur dépasse un seuil donné. Ce dernier est calculé en utilisant l'algorithme de Wen Hsiang Tsai [18]. Ce faisant, certaines droites ne sont pas mises en évidence car leur point représentatif n'atteint pas la valeur du seuil et, au contraire, apparaissent certaines droites qui n'existent pas dans l'image. Si on reprend l'observation de la figure 3, on constate la présence de quatre maxima. Il est raisonnable de penser que, pour une image quelconque, des maxima se groupent autour de ceux de l'image uniforme. Nous cherchons alors non plus les maxima de façon absolue, mais relativement à la transformée de l'image uniforme, en divisant la transformée de l'image par la transformée de l'image uniforme. Nous présentons le résultat de cette normalisation à la figure 7.

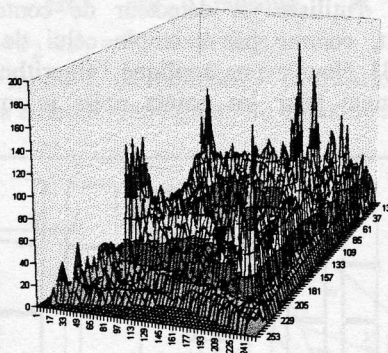


Figure 7. Transformée de Hough normalisée par la transformée de l'image uniforme.

Le seuillage est alors plus efficace et isole plus nettement les points représentatifs des droites principales de l'image. L'efficacité de cette méthode a été montrée en traçant les droites dont les paramètres

sont les coordonnées des maxima isolés par le seuillage et en comparant à l'image de départ.

Nous présentons à la figure 8 le résultat du seuillage sur la transformée normalisée. Chaque point marqué en noir est la transformée d'une droite dont les paramètres sont les coordonnées du point.

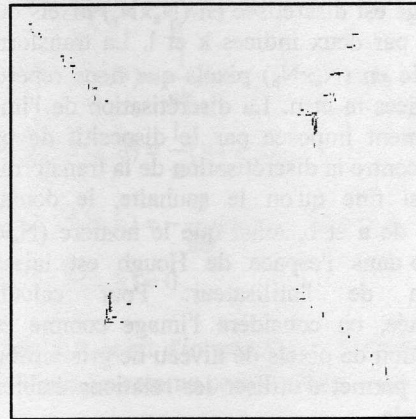


Figure 8. Transformée seuillée pour ne laisser apparaître que les maxima locaux.

8. Transformée inverse

Connaissant les paramètres des droites, nous pouvons tracer celles-ci dans l'espace (x,y) . Nous utiliserons cette méthode en pratique. Nous voulons montrer que nous pouvons obtenir le même résultat en revenant à l'original par application de la transformée inverse. Il est connu que la transformée de Radon est inversible [4] et nous conjecturerons qu'il en est de même de la transformée de Hough, par suite de la similitude de leur expression. Soit donc la transformée de Hough

$$\tilde{I}(a,b) = \iint I(x,y) \delta(f(x,y,a,b)) dx dy.$$

Si on inverse, alors

$$\tilde{\tilde{I}}(x,y) = \iint \tilde{I}(a,b) \delta(f(x,y,a,b)) da db,$$

en supposant que $\tilde{\tilde{I}}(x,y) = I(x,y)$.

Dans le cas d'un rectangle uniforme de l'espace de Hough, de coordonnées $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$, l'inverse obtenu est

$$\tilde{\tilde{I}}(x,y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{4n e^{4n(ax+by-|a|-|b|+1)}}{(1 + e^{4n(ax+by-|a|-|b|+1)})^2} db da,$$

et si $a > 0$ et $b > 0$,

$$\tilde{I}(x,y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{4n e^{4n(a(x-1)+b(y-1)+1)}}{(1 + e^{4n(a(x-1)+b(y-1)+1)})^2} db da$$

Si on note

$$\beta_1 = a_1(x-1) + b_1(y-1) + 1$$

$$\beta_2 = a_1(x-1) + b_2(y-1) + 1$$

$$\beta_3 = a_2(x-1) + b_1(y-1) + 1$$

$$\beta_4 = a_2(x-1) + b_2(y-1) + 1$$

alors

$$\tilde{I}(x,y) = \frac{1}{(x-1)(y-1)} (\text{Pos}(\beta_4) - \text{Pos}(\beta_3) - \text{Pos}(\beta_2) + \text{Pos}(\beta_1))$$

Pour $a < 0$ on remplace $(x-1)$ par $(x+1)$ et pour $b < 0$ on remplace $(y-1)$ par $(y+1)$. La transformée inverse en un point (x,y) est la somme des transformées inverses obtenues pour chacun des 4 quadrants du plan (a,b) .

8.1 Exemple

Reprenons l'exemple de l'image bureau. En calculant la transformée inverse des maxima relatifs, nous obtenons l'image présentée à la figure 8 que nous pouvons comparer à l'image de départ.

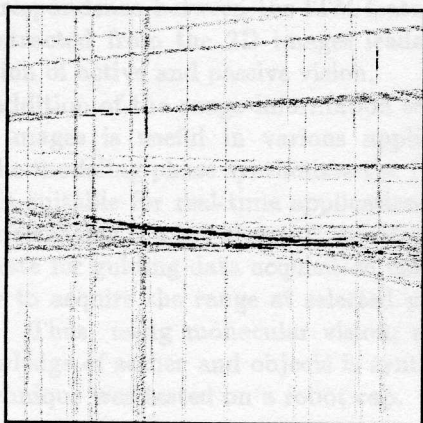


Figure 9. Transformée inverse.

Nous voyons apparaître les droites d'alignement des bords des meubles et des fenêtres. L'image étant confuse dans le bas des fenêtres, la transformée inverse est elle-même confuse à ce niveau. On peut considérer qu'un très grand nombre de points sont alignés à ce niveau. Cependant la transformée met en évidence toutes les possibilités d'alignement. Dans le cadre de cette présentation, nous n'avons pas mis en oeuvre des techniques de recherche des maxima pertinents au niveau de la transformée, ce qui nous aurait permis d'éliminer les points superflus.

9. Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous présentons une nouvelle approche de la transformée de Hough. Cette approche permet le calcul théorique de la transformée dans le cas de la recherche de droites. Ceci a deux conséquences pratiques :

- la connaissance de la transformée d'une image uniforme permet de faire ressortir les détails par rapport au fond de l'image, jusqu'à présent ce calcul était conduit par intégration numérique, la méthode proposée donne immédiatement la valeur de cette transformée ;

- ce travail ouvre la voie de la recherche d'un algorithme rapide de cette transformée, voie de recherche que nous explorons activement.

La forme de la transformée de Hough que nous proposons à la relation {E3} est immédiatement généralisable à la recherche d'autres éléments que des droites dans des images, en réécrivant la relation définissant la forme géométrique. Ainsi, nous testons actuellement la recherche de paraboles dans des images ultrasonores. Malheureusement, si nous avons pu calculer analytiquement l'intégrale définissant la transformée de Hough dans le cas des droites, l'approximation proposée pour la distribution de Dirac ne permet pas ce calcul pour les coniques. Nous calculons alors une approximation numérique de l'intégrale. L'implantation de la transformée est dans ce cas de même complexité que pour les méthodes classiques. Nous portons actuellement nos efforts sur l'obtention d'une autre approximation de la distribution de Dirac permettant le calcul analytique dans le cas des coniques. L'idée directrice est que dans le cas de courbe ayant beaucoup de paramètres, la connaissance théorique de la transformée permettrait d'éliminer, par intégration préalable, les paramètres non utilisés. La recherche des maxima pourrait ainsi s'effectuer paramètre après paramètre, la recherche d'un maximum selon un paramètre s'effectuant avec la valeur trouvée pour les paramètres déjà traités, alors que la méthode actuelle exige un calcul systématique pour tous les points de l'espace des paramètres.

Un autre axe de recherche est aussi ouvert en remplaçant dans l'expression {E1} l'égalité par une inégalité et donc, dans l'expression {E2} la distribution de Dirac par celle d'Heaviside. Les formes recherchées sont alors des formes pleines, et non plus des lignes (par exemple des disques à la place des cercles).

Bibliographie

- [1] **P. Ambs, S.H.Lee, Q. Tian, Y. Fainman.** Optical implementation of the Hough transform by a matrix of holograms. *Appl. Opt.* Vol 25, p 4039-4045. 1986
- [2] **S.R. Deans.** Hough transform from the Radon transform. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* PAMI-3, p 185-188. 1981
- [3] **R. Deriche.** Using Canny's criteria to derive a recursively implemented optimal edge detector. *Inter. Jour. of Computer Vision*, Kluwer, Vol 1, n°2, p 167-187. May 1987
- [4] **M. Dietrich, G. Pascal.** Utilisation de la transformation de Radon en sismique. *Traitement du Signal* Vol 4, n°4, p 297-304. 1987
- [5] **R.O. Duda, P.E. Hart.** Use of Hough transformation to detect lines and curves in pictures. *In ACM 15*, p.11-15, 1972.
- [6] **G. Eichmann, B.Z. Dong.** Coherent optical production of the Hough transform. *Appl. Opt.* Vol 22, p 830-834. 1983
- [7] **G.R. Gindi, A.F. Gmitro.** Optical feature extraction via the Radon transform. *Opt Eng.* Vol 23, p 499-506. 1984
- [8] **P.V.C. Hough.** Method and means of recognizing complex patterns *US patent 3 069 654* (18.12.1962)
- [9] **J. Illinworth, J. Kittler.** A survey of the Hough Transform. *Computer Vision, Graphis and Image Processing.* Vol 44, p 87-116. 1988.
- [10] **H. Kalviainen, P. Hirvonen, Lei Xu, E. Oja.** Probalistic and non-probalistic hough transform. *Image and Vision Computing.* Vol 13, n°4, p 239-252, 1995
- [11] **J. Lopez, P. Pousset.** Transformée de Hough discrète et bornée. Application à la détection de droites parallèles et du réseau routier. *Traitement du signal.* Vol 5, n°4, p 281-290. 1988
- [12] **H. Maitre.** Contribution to the prediction of performances of the Hough Transform. *Rapport ENST/84 C007.* 1984
- [13] **H. Maitre.** Contribution to the prediction of performances of the Hough transform. *IEEE Trans Pattern Anal. Mach.Intell.* PAMI-8, p 669-674. 1986
- [14] **H. Maitre.** Un panorama de la transformation de Hough. *Traitement du signal* Vol 2, p 305-317., 1986
- [15] **J. Richards, P. Vermeulen, E. Barnard, D. Casasent.** Parallel holographic generation of multiple Hough transform slices. *Appl. Opt.* Vol 27, p 4540-4545. 1988
- [16] **Rong Chin Lo, Wen Hsiang Tsai.** Gray-scale Hough transform for thick line detection in gray_scale images. *Pattern Recognition.* Vol 28, n°5, p 647-661, 1995
- [17] **T. Szoplik.** Line detection and directionnal analysis of images. *Optical Processing and Computing.* HH Arsenault, T. Szoplik, B. Macukow, Eds. Academic, Boston.p 391-419. 1989
- [18] **Wen Hsiang Tsai.** Moment preserving thresholding : a new approach. *Computer Vision, Graphics and Image Processing,* n° 29, p 377-393. 1985

Mots Clés :

Transformée de Hough, recherche des droites