

Structuration plane d'un nuage de points 3D non structuré et détection des zones d'obstacle

Nicolas Loménie⁽¹⁾

Laurent Gallo⁽²⁾

Nicole Cambou⁽²⁾

Georges Stamon⁽¹⁾

(1) Laboratoire SIP, Université René Descartes - Paris 5,
45 rue des Saints-Pères, 75006, France
lomn@math-info.univ-paris5.fr

(2) Aérospatiale, Service Vision, France

Résumé :

Nous nous intéressons au problème de la reconstruction 3D à partir d'un nuage de points descriptifs 3D issu de la stéréoscopie. L'émergence des obstacles dans une scène suppose notamment que le plan du sol ait été détecté. Pour cela, nous orientons la première phase de reconstruction 3D vers une structuration de l'environnement en zones planes comme les murs ou le sol grâce à un algorithme non supervisé de segmentation floue pilotée par la forme des groupements en cours de création. Les obstacles non plans sont reconstruits par α -formes, qui sont une généralisation de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points.

1. Position du problème et contexte

La reconstruction de scènes en 3D est un enjeu pour de nombreuses applications. Le développement des Modèles Numériques de Terrain en constitue la partie la plus visible, au même titre que les techniques de scanner 3D. Mais les deux applications citées précédemment raisonnent au niveau "point". Cet angle de vue est propre au système de vision active où les informations fournies par les capteurs de type lasers offrent un nuage de points 3D dense et directement exploitable en terme de surface d'objet. L'angle que nous adoptons en vision passive, en stéréoscopie typiquement, se veut d'abord moins coûteux et ensuite moins aigu. Il travaille sur des nuages de points 3D désorganisés plus ou moins denses, précis et certains, qui, par leurs propriétés moins agréables, ouvrent la voie à une réflexion plus approfondie sur la notion d'objets dans la scène et sur les techniques de reconstruction d'objets en 3D moins immédiates.

L'objectif de cette étude est de fournir à un robot doté de deux caméras une interprétation en termes d'objets 3D pour l'aider à naviguer de façon autonome dans un environnement totalement inconnu, et par conséquent *sans modèles a priori*. Les techniques actuelles de stéréoscopie fournissent un nuage de points 3D éventuellement

Abstract :

In this paper, the reconstruction of 3D scene based on a cloud of points -obtained by stereoscopy- is addressed. The emergence of obstacles implies the detection of ground among others objets. For this purpose, we have been first interested in structuring environment into flat areas like walls or ground, by the means of a fuzzy unsupervised segmentation algorithm controlled by the shape of current clusters. Obstacles of which morphology is not plane are reconstructed by the use of α -shapes, which are an extension of the convex hull of a set of points.

agrémentés "d'incertitudes" sur les positions des points reconstruits (Fig. 1 et 2). Mais la capacité à démêler cet écheveau de points pour créer les objets constitutifs de la scène fait encore défaut. Pour un robot autonome, il serait intéressant de savoir non seulement qu'une masse de points relativement élevés par rapport à un niveau de sol estimé lui fait obstacle sur sa droite, mais encore que cet obstacle potentiel est constitué d'une base cylindrique surmontée d'une surface sphérique, s'apparente vraisemblablement à un arbre, et que la surface continue de son enveloppe reconstruite lui permet de continuer sa route en frôlant le "tronc" sans être inquiété par le "feuillage", suffisamment élevé.

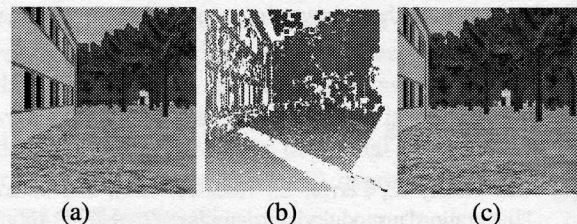


Figure 1. (a) Image de synthèse gauche (b) Carte de disparités (c) Image de synthèse droite

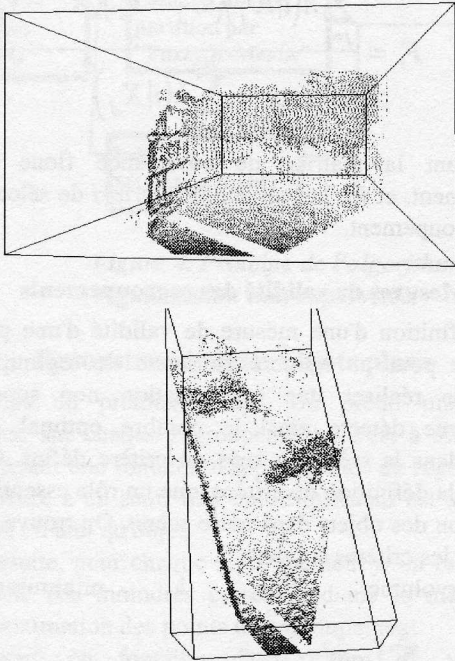


Figure 2. Nuage de points reconstruit à partir de la carte de disparité pour les images de synthèse.

Dans le domaine de la reconstruction 3D stéréoscopique, on peut regrouper les axes d'études autour de trois grands thèmes :

1. *Approximations de modèles de surfaces simples 3D (planes et quadriques) sur des régions 2D projetées.* Typiquement, il s'agit des approches développées par J-P Tarel et J-M Vézien [1][2] où un appariement au niveau des régions segmentées dans la paire stéréoscopique donnait l'estimation robuste de l'équation du plan 3D modélisant cette région. Dans cette optique, des méthodes originales de segmentation d'une paire d'image stéréoscopique pilotée par l'appariement ont été expérimentées [3][4]. W.Luo raisonne identiquement sur une segmentation de l'image des disparités en région en constatant que la disparité d'un plan dans l'espace tridimensionnel est une fonction linéaire dans le repère image [5].
2. *Segmentation du nuage de points 3D.* La plupart de ces techniques sous-entendent l'estimation d'une surface locale en chaque point du nuage, en fonction d'un voisinage défini souvent arbitrairement. La segmentation se fait ensuite par le biais de cette information de normale à la surface sous-jacente en utilisant la sphère gaussienne pour des primitives géométriques simples [6], ou en s'inspirant des travaux de Szelisky [7] sur les systèmes de particules pour gérer des topologies complexes et multiples [8]. Des approches fondées sur des représentations par

structure de graphes anisotropiques et l'usage de métriques induites par les données font également leur apparition [9]

3. *Triangulation de Delaunay.* Elles sont issues des diagrammes de Voronoï utilisés pour représenter des relations de distance entre objets et des phénomènes de croissance [10]. Fournissant une structure géométrique cohérente de représentation d'un nuage de points, elles ont abondamment servi la reconstruction d'objets de forme complexe mais sans changement de topologie [11].

L'utilisation des EDP semble également surgir.

2. Méthodologie

Dans un premier temps, le processus de reconstruction envisagé va tenter de structurer au mieux l'environnement. La découverte des *structures planes* de la scène sera ainsi une aide précieuse pour la suite du traitement : planter rapidement le décor c'est à dire les éléments de sols et de murs, notamment afin de mieux déterminer par la suite la localisation des obstacles de formes plus complexes, relativement à ces repères. Le schéma de principe de l'algorithme de reconstruction est décrit Fig. 3., la partie encadrée correspondant aux étapes traitées dans cet article.

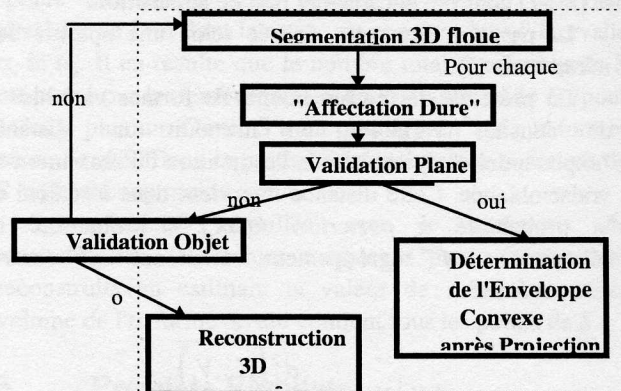


Figure 3. Schéma de l'algorithme de reconstruction 3D

2.1. Segmentation du nuage de points 3D

Pour palier à l'ambiguïté de définition de voisinage d'un point dans un nuage désorganisé inhérente aux approches qui doivent estimer localement des quantités différentielles d'ordre 0 (normales) ou d'ordre 1 (courbures), nous nous sommes intéressés à des techniques de regroupement utilisées plus spécifiquement en analyse de données. Recherchant une souplesse dans la définition des voisinages et du même coup dans la segmentation finale, les techniques floues nous sont apparues bien adaptées [12]. Initié par Bekdek [13], l'algorithme des K-moyennes floues a été notablement amélioré en

incorporant dans la mesure de distance les matrices de covariances floues des groupements formés au cours du processus, pour prendre en compte leur variabilité en terme de densité et de forme [14]. Cette technique s'avère très performante pour faire émerger des structures particulières dans un nuage de points de \mathfrak{R}^n , notamment les structures linéaires. Par ailleurs, l'incorporation d'une mesure de qualité de la partition finale permet d'obtenir un processus de segmentation non supervisé (nombre d'objets à détecter non précisé)[15].

2.1.1. L'algorithme du "Fuzzy K-Means"

L'algorithme des K-moyennes floues est fondé sur la minimisation de la fonction objective suivante, définie par rapport à U , une K -partition floue des données, et à V , un ensemble de K prototypes :

$$J = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^K (u_{ij})^m d^2(X_j, V_i) ; K \leq N \quad (1)$$

où X_j est le vecteur de coordonnées du $j^{\text{ème}}$ point du nuage, V_i est le centroïde du $i^{\text{ème}}$ regroupement ("cluster"), u_{ij} est le degré d'appartenance de X_j au $i^{\text{ème}}$ regroupement, $d(X_j, V_i)$ est l'expression d'une distance entre X_j et V_i , N est le nombre de points, K est le nombre de regroupements et m ($m > 1$) contrôle le caractère flou de la partition.

La partition floue est réalisée selon une optimisation itérative de (1).

En présence de regroupements de formes variables et de densités variables, on introduit une distance "exponentielle" d_e inspirée de l'estimation du maximum de vraisemblance. Cette distance intervient dans le calcul de la probabilité *a posteriori* $h(i|X_j)$, probabilité de sélectionner le $i^{\text{ème}}$ regroupement connaissant le $j^{\text{ème}}$ vecteur de coordonnées :

$$h(i | X_j) = \frac{1}{d_e^2(X_j, V_i)} \frac{1}{\sum_{k=1}^K d_e^2(X_j, V_k)}$$

$$d_e^2(X_j, V_i) = \frac{[\det(F_i)]^{1/2}}{P_i} \exp\left[\frac{(X_j - V_i)^T F_i^{-1} (X_j - V_i)}{2}\right]$$

où :

$$P_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N h(i | X_j)$$

$$F_i = \frac{\sum_{j=1}^N h(i | X_j) (X_j - V_i)(X_j - V_i)^T}{\sum_{j=1}^N h(i | X_j)}$$

F_i étant la matrice de covariance floue du $i^{\text{ème}}$ regroupement, et P_i , la probabilité *a priori* de sélectionner le $i^{\text{ème}}$ regroupement.

2.1.2. Mesures de validité des regroupements

La définition d'une mesure de validité d'une partition spécifique pour un nombre K donné de regroupements permet de réaliser une segmentation non supervisée. L'algorithme détecte ainsi le nombre optimal d'objets présents dans la scène au sens du critère défini. On voit donc que la définition du critère joue un rôle essentiel dans la détection des objets dans notre scène. On trouve dans la littérature les critères suivants :

- l'hypervolume flou à minimiser :

$$HV_F = \sum_{k=1}^K [\det(F_i)]^{\frac{1}{2}}$$

- la densité de partition moyenne à maximiser :

$$D_{PM}^K = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \frac{S_i}{[\det(F_i)]^{1/2}}$$

où S_i est définie par :

$$S_i = \sum_{j=1}^N u_{ij} \quad \forall X_j \in \left\{ X_j : (X_j - V_i)^T F_i^{-1} (X_j - V_i) < 1 \right\}$$

A ceux de la littérature, nous ajoutons deux nouveaux critères J_e et I_e :

- le critère global adapté à la distance exponentielle

$$J_e = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^K (u_{ij})^m d_e^2(X_j, V_i) \quad \forall X_j \in \left\{ X_j : (X_j - V_i)^T F_i^{-1} (X_j - V_i) < 1 \right\}$$

- un critère global adapté à la distance exponentielle modifié :

$$I_e = \frac{J_e}{N \min_{i,j} [d_e^2(V_j, V_i)]}$$

L'algorithme de segmentation non supervisée est décrit pour un critère à maximiser Fig. 4. L'arrêt est atteint quand la valeur du critère de partition dépasse moins de 90% du maximum courant MC.

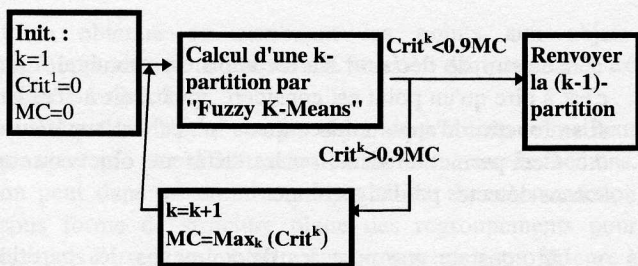


Figure 4. Principe de l'algorithme de segmentation non supervisée.

2.2. Reconstruction des objets plans

Dans un premier temps, on prend une première décision sur chaque regroupement : c'est à dire que tout point ayant une fonction d'appartenance au regroupement j supérieure à un seuil fixé empiriquement est affecté à ce dernier en tant qu'objet.

Ensuite, pour chaque regroupement j , on estime par la méthode des moindres carrés médians le meilleur plan d'approximation des points du regroupement.

Enfin, en fonction d'un critère de validité de l'estimation plane, fixé empiriquement, on valide ou on rejette la reconstruction en structure plane du regroupement j .

La structure plane est obtenue par projection des points de "l'objet" j sur le plan estimé, puis par extraction de l'enveloppe convexe des points de l'objet projeté.

2.3. Reconstruction des formes complexes

Les "objets" rejetés lors de la phase de structuration plane devront être :

- soit reconstruits par la méthode des α -forme en tant qu'objet de la scène;
- soit aiguillés vers un nouveau processus de segmentation en tant que sous-scène.

A ce niveau du processus, le critère de décision pour l'alternative précédente n'a pas encore été déterminé.

Dans \mathcal{R}^3 , Boissonnat [11] a suggéré l'utilisation des triangulations de Delaunay associées à des heuristiques pour "sculpter" une forme unique connexe issue d'un nuage de points. Le concept de forme formalisé par H. Edelsbrunner [16] est plus général et mathématiquement bien défini. En fait, les α -formes sont une généralisation de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points S . Pour α nombre réel tel que $0 \leq \alpha \leq +\infty$, l' α -forme de S est un polytope qui n'est ni nécessairement convexe ni nécessairement connexe, défini comme un sous-graphe de la triangulation de Delaunay de S . Pour $\alpha = +\infty$, l' α -forme est identique à l'enveloppe convexe. Cependant, à mesure que α décroît à partir de $+\infty$, l' α -forme se contracte graduellement en développant des cavités. Ces cavités peuvent se rejoindre pour former des tunnels, et des trous

peuvent même apparaître. Intuitivement, un morceau du polytope disparaît quand α devient suffisamment petit pour qu'une sphère de rayon α , ou plusieurs telles sphères, puisse occuper son espace sans inclure de points de S .

Formellement, pour $0 < \alpha < \infty$, soit une α -boule de rayon α (une 0 -boule est un point et une ∞ -boule est un demi-espace ouvert). Une α -boule b est vide si $b \cap S = \emptyset$. Tout sous-ensemble $T \subseteq S$ de taille $|T|=k+1$, avec $0 \leq k \leq 3$, définit un k -simplex σ_T , enveloppe convexe de T , noté $\text{conv}(T)$. Pour $0 \leq k \leq 2$, un k -simplex σ_T est dit α -exposé s'il existe une α -boule b vide avec $T = \partial b \cap S$, où ∂b est la sphère ou le plan bornant b . Ainsi, un α fixé définit un ensemble $F_{k,\alpha}$ de k -simplexes α -exposés pour $0 \leq k \leq 2$. L' α -forme de S notée S_α est le polytope dont les limites sont les triangles de $F_{2,\alpha}$, les arêtes de $F_{1,\alpha}$ et les sommets de $F_{0,\alpha}$.

Pratiquement, soit D la triangulation de Delaunay de l'ensemble de points S . Pour chaque k -simplexe $\sigma_T \in D$, il existe un unique intervalle tel que σ_T est une face de l' α -forme S_α si et seulement si α appartient à cet intervalle. Le calcul des bornes de cet intervalle en fonction de la nature de σ_T et de $|T|$ est décrit dans [17]. Rappelons simplement que les α -formes d'un ensemble fini de points S constituent une famille discrète. En effet, $S_{\alpha_1} \neq S_{\alpha_2}$ si et seulement si il existe une boule ouverte vide bornée par la plus petite sphère circonscrite d'un côté, d'un triangle, ou d'un tétraèdre de D et dont le rayon est compris dans l'intervalle α_1 et α_2 . Il en résulte que le nombre total d' α -formes de S est borné par le nombre total N de k -simplexes de D (pour $1 \leq k \leq 3$) plus un. Donc, S a au plus $N = 2n^2 - 5n$ α -formes où $n = \text{card}(S)$. Dans la pratique, le spectre des α -formes de S est beaucoup moins étendu.

Les "objets" aiguillés vers le processus de reconstruction des formes complexes par α -formes sont reconstruits en estimant la valeur de α minimisant le volume de l' α -forme S_α qui contient tous les points de S .

3. Premiers Résultats

3.1. Segmentation du nuage de points 3D

L'algorithme des K-moyennes floues a immédiatement fourni des résultats probants au niveau de la détection des structures planes dans le nuage de points tout en faisant émerger les différentes autres régions de la scène. L'étude des résultats de la segmentation non supervisée en fonction du critère employé nous a en outre renseigné sur la viabilité d'un tel procédé. Nous présentons ci-dessous l'analyse succincte des résultats comparés en illustrant par les différentes K-partitions où K est le "nombre optimal d'objets" détectés dans la scène.

Les tableaux 1.a et 1.b regroupent les différentes mesures de qualité de la segmentation en fonction du critère de validité choisi et du nombre d'objets fixé dans les

deux scènes (Fig. 1 et 5). Sont grisées les cases correspondant à des extrema locaux de validité et noircies celles correspondant à l'arrêt effectif de l'algorithme.



Figure 5. Image réelle de sol "lunaire"

	D_{PM}	J e	I e		D D_{PM}	J e	I e
1	5.4	3 .83	N D	1	1 23	2 5.0	N D
2	43. 6	1 6.1	0 .05	2	1 56	1 3.3	0 .02
3	103 .0	1 2.1	0 .16	3	4 61	1 4.5	0 .40
	131 6.1	1 7.7	0 .60	4	4 51	1 9.9	0 .45
5	106 5.6	6 .9	0 .20	5	4 33	2 8.3	0 .56
	180 3.0	9 .8	0 .26	6	3 67	1 7.9	0 .35
7	150 6.5	9 .1	0 .26	7	3 44	1 6.5	0 .31
8	698 .7	6 .7	0 .68	8	3 42	1 3.7	0 .25
	187 4.3	7 .3	0 .32	9	2 14	7 .2	0 .21

(a) (b)

Tableau 1. Mesure de validité des partitions en fonction du nombre d'objets détectés et du critère de validité. (a) image de synthèse (b) image réelle

L'observation de ces tableaux permet de dégager deux critères probants :

- a) le critère de densité moyenne de partition D_{PM} ;
- b) le critère global adapté à la distance exponentielle modifié I_e .

Le tableau suivant résume le résultat de l'algorithme de segmentation non supervisée en fonction de ces deux critères :

	D_{PM}	I_e
Image de Synthèse (Fig. 5)	4-partition	4-partition
Image Réelle (Fig. 6)	5-partition	5-partition

Tableau 2. Résultats de la segmentation non supervisée en fonction des critères D_{PM} et J_e .

Le seuil de décision d'affectation est pris égal à 0.5 : c'est à dire qu'un point est considéré appartenir à "l'objet" j si sa fonction d'appartenance à cet "objet" est supérieure à 0.5. Ceci permet de visualiser les différents objets ou sous-scènes détectés par l'algorithme.

On constate que pour les deux images, les partitions obtenues par l'algorithme de segmentation non supervisée selon le critère D_{PM} peuvent être validées par l'œil humain comme des partitions de la scène en éléments d'intérêt cohérents (Fig. 6 et 7.a). Des partitions d'ordre supérieur (nombre de regroupements plus élevé) affine encore la partition en zones d'intérêts : la 9-partition de la scène réelle fait émerger un rocher du fond de la scène associé au rocher de premier plan (regroupement noir de la Figure 7.b) ce qui permet d'espérer que la boucle de segmentation du schéma de principe du processus de reconstruction (Fig. 3) permettra de converger vers une partition optimale.

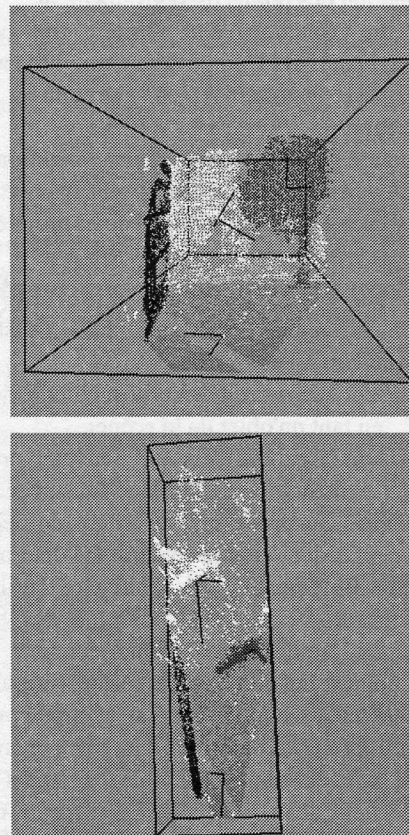


Figure 6. Deux vues d'une 4-Partition de l'image de synthèse obtenue par le critère D_{PM}

3.2. Reconstruction 3D

Dans la première phase de notre démarche, une fois une première segmentation obtenue, on tranche la partition

floue obtenue en attribuant les points aux objets-regroupements pour lesquels la fonction d'appartenance est supérieure à 0.5.

En estimant pour chaque objet ainsi obtenu le meilleur plan associé par la méthode des moindres carrés médians, on peut dans un premier temps valider la reconstruction sous forme de structure plane des regroupements pour lesquels l'erreur au moindre carré moyenne est inférieure à un seuil fixé empiriquement (par exemple 0.01).

Prenons le cas de la 4-partition de la scène de synthèse. Le processus de structuration plane valide la reconstruction de l'avant-sol et du mur et rejette celle de l'arbre et du fond de la scène. La reconstruction de l'arbre par une 2.2-forme ("forme optimale", voir Fig. 9) donne une structure géométrique de l'objet appréciable.

Etudions la 5-partition de la scène réelle. Le processus de structuration plane valide la reconstruction de l'avant-sol et du sol de part et d'autre du rocher au premier plan et rejette celle du roc et du fond de la scène. La reconstruction du roc par une 0.6-forme ("forme optimale", voir Figure 11) donne une structure géométrique de l'objet appréciable.

Si l'on oublie le fond de la scène pour l'instant, les résultats de la reconstruction 3D des deux scènes donnent déjà une analyse de scène relativement satisfaisante en terme de structuration plane et d'émergence des obstacles (Fig. 8 et 10).

4. Conclusions et perspectives

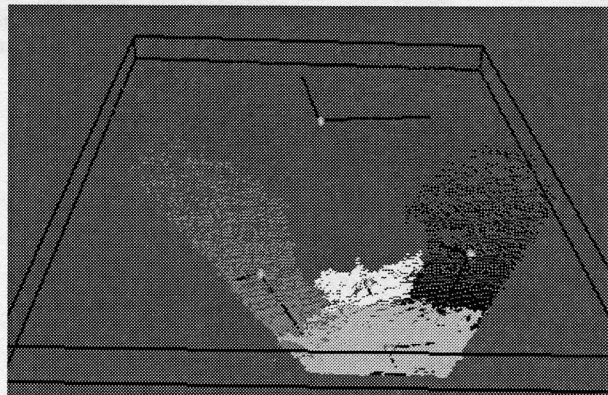
La première étape de reconstruction de la scène en zones d'intérêt cohérentes est franchie : celle-ci a permis de structurer la scène au mieux lors d'une première passe. Plusieurs points restent à étudiés pour la suite du processus de reconstruction :

- * Analyse et amélioration des seuils empiriques :
 - d'affectations aux "objets";
 - de validation des structures planes;
- * Analyse et amélioration des critères de qualité :
 - de partition;
 - d'aiguillage sous-segmentation / reconstruction par α -formes, notamment par la définition de descripteurs topologiques et géométriques de formes.

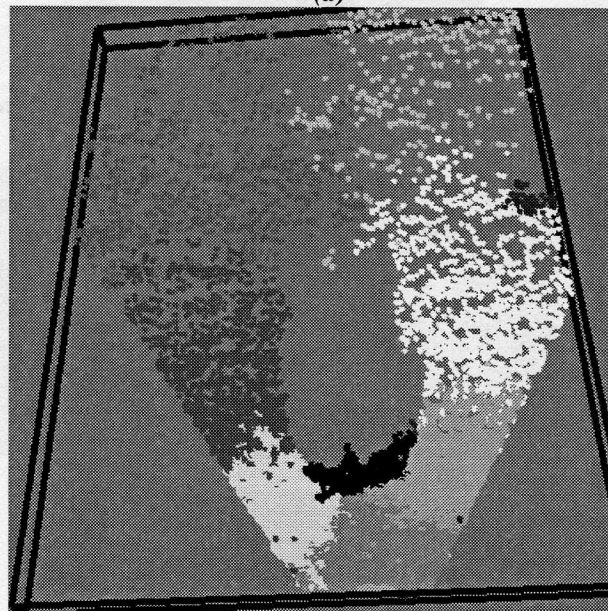
Par ailleurs, le raccourci emprunté au moment de la reconstruction consistant à trancher la partition floue obtenue après segmentation n'est pas entièrement satisfaisant. On aimerait en effet conserver cette information d'appartenance floue à un objet, et notamment au niveau des frontières d'objet, pour l'intégrer dans le processus de reconstruction : au niveau des seuil de

validité pour les structures planes mais également au niveau des α -formes. La voie vers une reconstruction plus fondamentalement floue est en voie d'exploration.

Enfin, la gestion des incertitudes sur les points de données (la définition d'une incertitude induite sur l'objet reconstruit par exemple) et la gestion des nouvelles vues stéréoscopiques provenant du mouvement du robot et donc des mises à jours possibles (la modification des incertitudes sur les objets reconstruits) constituent au autre pan du travail qu'il reste à accomplir.



(a)



(b)

Figure 7. (a) Vue d'une 3-Partition de l'image réelle obtenue par le critère D_{PM} (b) Vue d'une 9-Partition de l'image réelle.

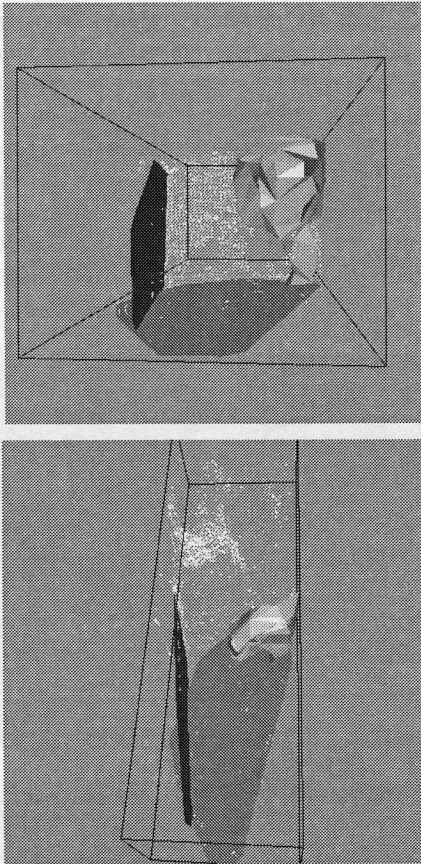


Figure 8. Reconstruction 3D de la scène de synthèse : première phase.

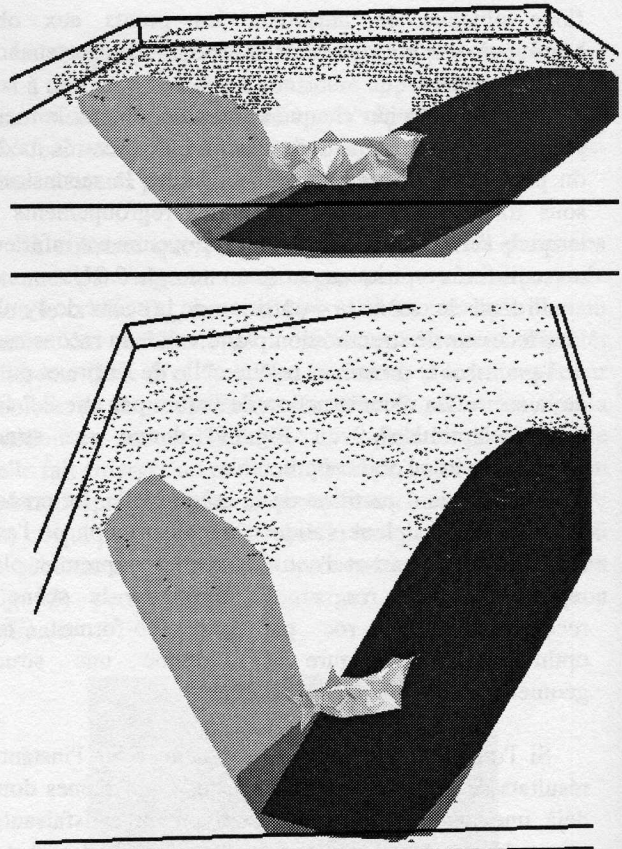


Figure 10.. Reconstruction 3D de la scène réelle : première phase.

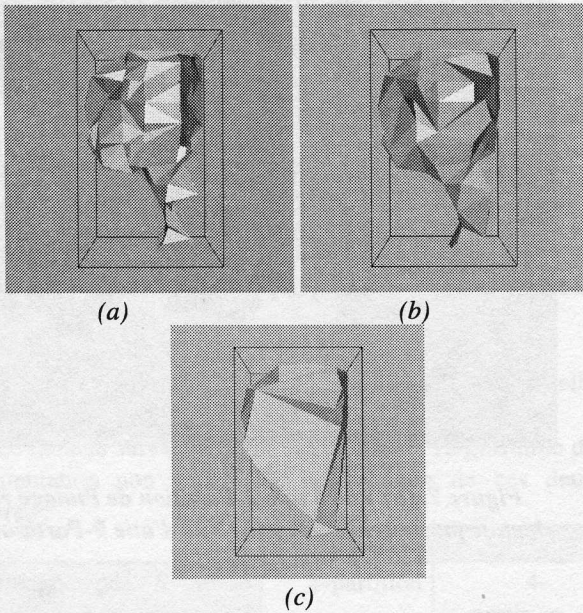


Figure 9. Reconstruction de l'objet "arbre" par α -formes (a) 0.7-forme (b) 2.2-forme (c) ∞ -forme ou enveloppe convexe

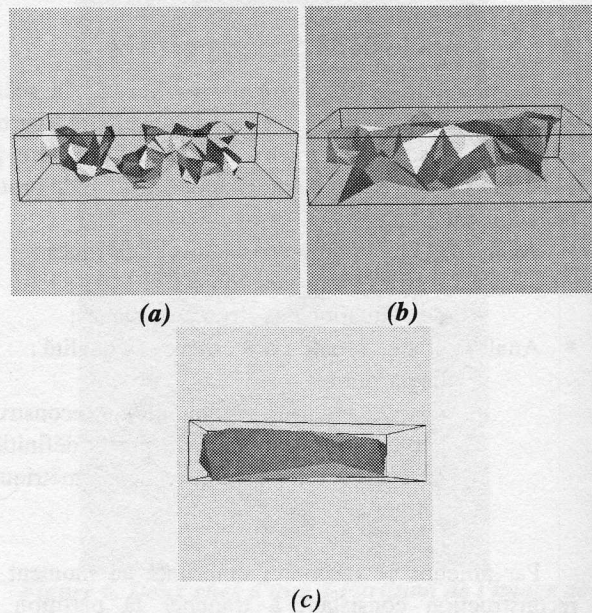


Figure 11. Reconstruction de l'objet "rocher" par α -formes (a) 0.1-forme (b) -0.6-forme (c) ∞ -forme ou enveloppe convexe

Références :

- [1] : Jean-Philippe Tarel, Reconstruction globale et Robuste de facettes 3D, Rapport de recherche, INRIA, Février 1996.
- [2] : Jean-Marc Vezien, Techniques de reconstruction globale par analyse de paires d'images stéréoscopiques, Thèse, Paris 7, 1995.
- [3] : E. Lutton, 3D Model Based Stereo Reconstruction using coupled Markov Random Fields, Rapport de recherche N° 1951, INRIA, Juin 1993.
- [4] : Sabine Randriamasy, Segmentation descendante coopérative en régions de paires d'images stéréoscopiques, Thèse, Paris 9, 1992.
- [5] : Wei Luo, Utilisation des modèles de surfaces en stéréovision, Thèse, ENST, 1991
- [6] : François Goulette, Construction automatique de modèles CAO à partir d'images télémétriques, thèse ENSMP, 1997.
- [7] : R. Szelisky and David Tonnesen, Surface Modeling with Oriented Particle System, Computer Graphics, Vol 26, N°2., Juillet 1992, p185.
- [8] : P. Fua, Reconstructing complex surfaces from multiple stereo views, International Conference on Computer Vision, Boston, June 1995.
- [9] : R. Chaine, A graph-based anisotropic approach to 3-d data segmentation. International Symposium on Computer Graphics, Image processing and Vision - SIBGRAP'98, Octobre 1998
- [10] : F. Cloppet-Oliva, Analyse d'images de cultures cellulaires obtenues par microscopie optique : Application à des images de neuroblastomes de souris, Thèse de l'Université René Descartes, Décembre 1996.
- [11] : Boissonat, Géométrie Algorithmique.
- [12] : N. Ben Hajel-Boujemaa, Modélisation floue de l'incertitude pour la segmentation d'images, Thèse de l'Université René Descartes, Février 1993.
- [13] : J.C. Bezdec, C. Coray, R. Gunderson and J. Watson, Detection and characterization of cluster substructure, SIAM J. Appl.Math., vol.40, pp.339-372, 1981.
- [14] : D.E. Gustafson, Fuzzy Clustering with a fuzzy covariance matrix, Proc. IEEE CDC, San Diego, CA, pp. 761-766, Jan. 10-12, 1979.
- [15] : I. Gath et A. B. Geva, Unsupervised Optimal Fuzzy Clustering, PAMI, vol II., NO. 7., pp. 773-781, July 1989.
- [16] : H. Edelsbrunner and D.G. Kirkpatrick, On the Shape of a set of points in the plane, IEEE Trans. Inform. Theory 29, 551-559, 1983.
- [17] : H. Edelsbrunner and E.P Mücke, Three dimensional alpha Shapes, ACM Transactions on Graphics, 13(1):43-72, 1994.