

# La trajectoire déformable : un modèle optique des contours géodésiques fondé sur le principe de Fermat

Eric Deléchelle

Laboratoire d'Etude et de Recherche en  
Instrumentation Signaux et Systèmes

Université Paris-12 Val de Marne, Créteil, France

delechelle@univ-paris12.fr

Jacques Lemoine

Laboratoire d'Etude et de Recherche en  
Instrumentation Signaux et Systèmes

Université Paris-12 Val de Marne, Créteil, France

lemoine@univ-paris12.fr

## Résumé

Nous présentons une nouvelle interprétation de l'approche « contours géodésiques » développée récemment pour la détection de contours sur les images. Pour cela, un modèle optique fondé sur le principe de Fermat est appliqué sur les images est assimilant celles-ci à des milieux non homogènes pour la propagation de la lumière. Cette approche définit une nouvelle variété active, la « trajectoire déformable ». Les deux approches « trajectoires déformables » et « contours géodésiques » aboutissent au même formalisme, ce qui permet de montrer de quelle manière les différentes grandeurs établies dans la seconde approche peuvent trouver une interprétation physique.

**Mots clés :** Contours déformables, contours géodésiques, principe de Fermat, trajectoire déformable.

## Abstract

We present a new interpretation of the geodesic-based approach for deformable contour in terms of the well know Fermat principle. So, with grey levels image viewed as refraction indexes, we define the deformable path by a set of equations for a minimisation problem. Numerical solutions are obtained with a dynamic programming technique which produces very robust and stable results. We present experiments involving the detection of contours from synthetic and real images. Both, optical and geodesic approaches are governed by the same equation. But the optical one with the deformable paths gives us a physical sense.

**Key words :** Deformable contours, geodesic contours, Fermat principle, deformable paths.

## 1 Introduction

Depuis leur introduction en 1987, les contours déformables, ou contours actifs, sont devenus très populaires [1], [2] et [3]. Leur application se situe dans de nombreux domaines tels que la reconnaissance des formes, la biologie ou l'imagerie médicale. Le plus souvent, le modèle utilisé repose sur une analogie mécanique. Récemment, une nouvelle approche développée par Cohen & Kimmel [4] utilise la notion de chemin de moindre action, ou contour géodésique, pour la détection de contours.

Dans cet article, nous proposons une méthode qui s'appuie sur une analogie optique pour définir un nouveau modèle de contour déformable, la « trajectoire déformable ». La résolution numérique du problème de minimisation qui en découle est fondée sur le principe de programmation dynamique. De nombreux exemples de détection sur images synthétiques et réelles illustrent la méthode proposée. Enfin, nous montrons de quelle manière les deux approches « trajectoire déformable » et « contour géodésique » peuvent être rapprochées.

## 2 Contours actifs

Les modèles classiques de contours actifs font appel à la notion de corps élastiques subissant des contraintes extérieures [1], [2] et [3]. La forme prise par l'élastique est liée à une minimisation d'énergie totale. Celle-ci est composée par la somme d'une énergie interne (énergie de régularisation) liée à l'élongation et à la torsion du corps, et d'une énergie externe liée aux forces extérieures (définies à partir du gradient ou des niveaux de gris d'une image) auxquelles l'élastique est soumis.

L'énergie du modèle mécanique associé à la courbe  $C(v) = (x(v), y(v))$  est donnée par

$$E(C) = \int_A^B \left[ \frac{w_1}{2} \|C'(v)\|^2 + \frac{w_2}{2} \|C''(v)\|^2 + P(C(v)) \right] dv \quad (1)$$

où  $C'$  et  $C''$  sont respectivement les dérivées première et seconde de  $C$  par rapport à  $v$ , et  $P$  est le potentiel associé aux forces externes. Le choix des constantes  $w_1$  et  $w_2$  détermine l'élasticité et la rigidité de la courbe.

La dynamique de déformation, et donc le temps, ne pas pris en compte. Pour cela, afin d'ajouter à l'information de position (statique) celle qui concerne l'évolution de chaque « élément » de l'élastique, il convient de définir un système de type inertiel-dissipatif. Le caractère inertiel est obtenu en définissant une densité de masse pour l'élastique, alors que le caractère dissipatif est obtenu en considérant que le milieu (l'image) présente une certaine viscosité. Ainsi, masse et viscosité régissent la dynamique de déformation. Il se pose alors le problème suivant : de quelle manière définir ces deux grandeurs compte tenu des images à traiter ? Pour cela, le modèle est généralement simplifié d'une part en ne considérant que l'aspect dissipatif de la dynamique (le corps est sans masse), d'autre part en fixant un coefficient de viscosité constant dans tout le milieu. La minimisation de l'énergie totale aboutit à un résultat qui dépend fortement du choix de la valeur retenue pour la viscosité. Certaines méthodes tentent d'énoncer une loi d'évolution locale pour la viscosité [3], mais là encore, la loi obtenue, le plus souvent à partir d'heuristiques, n'est valable que pour certaines familles d'images [4]. Une autre solution consiste à modifier l'énergie extérieure en intégrant de nouvelles forces qui ne sont pas attachées aux données mais peuvent être réglées suivant les images à traiter, c'est le cas par exemple du modèle du ballon [2]. On peut noter également l'existence de modèles de variétés actives qui ne sont pas fondés sur le modèle de l'élastique, par exemple une déformation géométrique de contours simule l'expansion d'un liquide sur un relief [5], la formalisation s'inspire de celle utilisée en mécanique pour caractériser la propagation d'un front d'onde.

Les inconvénients principaux des techniques de contours actifs peuvent être résumés ainsi, (i) *l'initialisation* : le contour initial doit être placé très près des contours de l'objet pour ne pas être arrêté par des éléments non significatifs (minimum locaux), (ii) *le paramétrage* : l'énergie interne n'est pas invariante par changement d'échelle, de plus la force de contraction n'est pas toujours appropriée à une bonne progression du contours vers la solution. Toutefois, des travaux récents ont permis d'améliorer ces faiblesses en introduisant la multirésolution soit directement sur les données, par

transformation pyramidale des images, soit en appliquant des modèles paramétriques hiérarchiques de contours [6].

### 3 Contours géodésiques

Une approche dérivée du modèle mécanique classique pour le contours actif est présentée dans [7]. L'idée développée par les auteurs est de s'affranchir du problème du choix des paramètres de régularisation en constituant une énergie externe (donc liée aux données) qui intègre de manière naturelle un terme de régularisation. Le modèle issu de la nouvelle formulation du problème de minimisation d'énergie n'est alors plus à caractère mécanique mais repose sur la recherche de la *géodésique minimale* sur une surface d'action minimale, en d'autres termes le chemin le plus court entre deux points au travers d'un relief. Bien que la démarche initiale soit différente de celle que nous présentons dans cet article, le formalisme qui en découle est semblable à celui qui est associé au modèle optique que nous présentons. Dans l'approche proposée par Cohen et Kimmel [1], la détection d'un contour est obtenue par la recherche du chemin  $C$  d'action minimum entre deux points  $A$  et  $B$ . L'énergie à minimiser à pour expression

$$E(C) = \int_A^B [w \|C'(s)\|^2 + P(C(s))] ds \quad (2)$$

$P$  est le potentiel d'attraction lié aux données et  $w$  est une constante de pondération du terme de régularisation. Si le paramètre  $s$  représente la longueur d'arc de la courbe  $C$ , alors  $\|C'(s)\|^2 = 1$  et l'équation (2) devient

$$E(C) = \int_A^B [w + P(C(s))] ds = \int_A^B \tilde{P}(C(s)) ds \quad (3)$$

où  $\tilde{P} = P + w$  représente un potentiel doté d'un terme de régularisation qui contrôle le lissage de la courbe. En effet, on montre [1] que la valeur absolue de la courbure  $\kappa$  le long de la géodésique est limitée par

$$|\kappa| \leq \frac{\sup_D \{\|\nabla P\|\}}{w} \quad (4)$$

où  $D$  est le domaine de l'image sur lequel est défini le potentiel  $P$ . Accroître la constante  $w$ , augmente le dénominateur sans affecter le numérateur dans (4), ainsi  $w$  agit bien comme paramètre de régularisation de la courbe.

Le potentiel d'attraction  $P$  peut-être directement calculer à partir des niveaux de gris ou du gradient de l'image, ou (et c'est la cas lorsque les contours recherchés présentent certaines discontinuités) être une fonction de la carte des distances des pixel de l'image aux points de contours préalablement détectés par un opérateur *ad hoc*. Dans les deux cas, la méthode de résolution numérique diffère de

celle classiquement utilisée pour les variétés actives. En effet, le contour recherché n'est pas détecté après déformations successives d'un contour initial, mais à la suite d'une procédure de propagation entre les points de départ et d'arrivée qui doivent correspondre à des pixels effectivement situés sur le contour à détecter.

#### 4 Principe de Fermat

Le principe de Fermat, dont l'énoncé est le suivant « Pour aller d'un point à un autre, la lumière emprunte le trajet pour lequel le temps de parcours est minimum » représente une surprenante transition entre la loi qui régit la déformation d'un corps élastique et celle qui décrit la dynamique d'une masse en mouvement. Un ruban, ou un fil élastique, est un corps dont certains points peuvent subir une contrainte de traction induisant un étirement local. La déformation ne varie pas dans le temps si les contraintes sont maintenues constantes. La description de l'état du corps, c'est-à-dire la position des éléments qui le composent collectivement, est indépendante du temps. Inversement, un objet en mouvement est vu comme une entité individuelle (un bloc) qui traverse l'espace au cours du temps. Le mouvement de l'objet est alors associé à une trajectoire spatio-temporelle pour laquelle, par définition, il est indispensable de prendre en compte le temps. En ce qui concerne la lumière, son trajet est défini à la fois dans l'espace (par le chemin emprunté entre deux points) et dans le temps (par la vitesse entre ces points). Il est généralement plus naturel de percevoir ce trajet spatio-temporel sous forme d'une courbe occupée en tout point et à tout moment par la lumière. En conséquence, l'aspect temporel disparaît. Le rayon de lumière, bien que défini par une entité isolée occupant tour à tour chaque site du trajet, est vu comme un fil indivisible, d'où le terme de « rai de lumière ».

##### 4.1 Chemin optique

D'après le principe de Fermat, le temps de parcours  $T$  entre deux points  $A$  et  $B$  est défini par

$$T = \int_A^B \frac{ds}{v} \quad (5)$$

où  $v = c/n$  est la vitesse de la lumière dans le milieu, elle est fonction de l'indice de réfraction  $n$  de ce milieu.  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide.

Dans un milieu non homogène, l'indice de réfraction varie d'un point à un autre et le temps de parcours est exprimé en fonction de  $n$  à l'aide de (5)

$$T = \frac{1}{c} \int_A^B n ds \quad (6)$$

Dans le cas d'une trajectoire planaire, le chemin emprunté entre deux points peut être décrit par la trajectoire  $y = f(x)$ . En posant  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$  et en considérant par exemple la variabilité en  $y$ ,  $x$  définit alors le paramètre de la trajectoire, le temps de parcours (6) est donné par

$$T = \frac{1}{c} \int_{x_A}^{x_B} n \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx \quad (7)$$

avec  $\dot{y} = dy/dx$ .

Le principe de Fermat, ou principe de moindre temps, pose que  $T$  est *minimum* sur la trajectoire, on a  $\delta T = 0$  qui indique, en fait, que l'intégrale du temps de parcours est *stationnaire* par rapport aux variations de la trajectoire, mais nous considérons ici que le temps de parcours de la lumière est réellement minimum.

##### 4.2 Equation d'Euler-Lagrange

La résolution de  $\delta T = 0$  à partir de l'expression (7) du temps de parcours est obtenue pour

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

où  $L$  est un lagrangien qui a pour expression

$$L = \frac{n}{c} \sqrt{1 + \dot{y}^2} \quad (9)$$

La relation (8) est l'équation d'Euler-Lagrange associée à la trajectoire  $y = f(x)$  suivie par la lumière. En exprimant les dérivées partielles dans (8) à l'aide de (9) et après simplifications on obtient une équation aux dérivées partielles (EDP) non linéaire du second ordre en  $y$

$$n\ddot{y} + \frac{\partial n}{\partial x} \dot{y}^3 - \frac{\partial n}{\partial y} \dot{y}^2 + \frac{\partial n}{\partial x} \dot{y} - \frac{\partial n}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$n\ddot{y} + \alpha \dot{y} = \beta \quad (11)$$

avec  $\alpha = \frac{\partial n}{\partial x} (1 + \dot{y}^2) - \frac{\partial n}{\partial y} \dot{y}$ ,  $\beta = \frac{\partial n}{\partial y}$ . La résolution numérique est obtenue par approximation des dérivées partielles à l'aide des différences finies centrées au point  $(x_j, y_j)$ . Ce qui permet d'écrire

$$y_j = \frac{1}{2} (y_{j+1} + y_{j-1}) + \frac{h\alpha_j}{4n_j} (y_{j+1} - y_{j-1}) - \frac{h^2}{2n_j} \beta_j \quad (12)$$

dont la forme matricielle est donnée par

$$\mathbf{My} = \mathbf{B} \quad (13)$$

$$y = [y_1, y_2, \dots, y_L]^T, \mathbf{B} = h^2 [\beta'_1, \beta_2, \dots, \beta_{L-1}, \beta'_L]$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & \mathbf{0} \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & a_{L-1} & b_{L-1} & c_{L-1} \\ \mathbf{0} & & & & a_L & b_L \end{bmatrix} \quad (14)$$

où  $a_j = 2n_j - h\alpha_j$ ,  $b_j = -4n_j$ ,  $c_j = 2n_j + h\alpha_j$   
 et  $\beta'_1 = \beta_1 - a_1 y_A$ ,  $\beta'_L = \beta_L - c_L y_B$

La matrice  $\mathbf{M}$  est tridiagonale, la résolution de (13) est donc facilement obtenue par décomposition LU. On note toutefois que les éléments de la matrice dépendent de  $y$  (non linéarité de l'EDP) et en pratique, la résolution matricielle nécessite une initialisation assez proche de la solution réelle. Dans le cas contraire, une méthode itérative de type Gauss-Seidel utilisant la relation (12) est préférable.

### 4.3 Programmation dynamique

La méthode variationnelle définie ci-dessus fait appel à la discrétisation des équations d'Euler-Lagrange de la trajectoire. Les dérivées sont approchées par les différences finies, ce qui confère à la méthode une certaine sensibilité au bruit. De plus, la convergence de l'algorithme est retardée par la non linéarité de l'EDP (10). Nous avons donc utilisé une technique différente de résolution numérique. La programmation dynamique est dans certains cas l'un des instruments les plus efficaces pour rechercher l'optimum d'une fonction. Cependant, afin d'appliquer la programmation dynamique dans un processus de décision, ce processus doit satisfaire aux conditions suivantes : (i) la décision est composée de plusieurs sous décisions (dénombrables ou non) qui sont des suites de décisions faisant partie d'une décision, (ii) le processus est séquentiel (dans une étape de décision les résultats des étapes précédentes sont déjà traités), (iii) le processus de décision est un processus de Markov (la décision d'une étape ne dépend que de l'étape présente et est indépendante des étapes antérieures).

Nous ne présenterons ici que le principe sur lequel repose la technique de programmation dynamique, une explication détaillée peut être trouvée dans [8]. Pour le problème de minimisation qui nous concerne, l'idée utilisée en programmation dynamique est la suivante : partant d'une trajectoire initiale constituée de  $L$  points, une procédure itérative permet de trouver le minimum global sur toutes les déformations locales possibles de la trajectoire en permettant à chaque point de se déplacer dans un voisinage donné

## 5 Trajectoires déformables

Le principe de Fermat, nous permet de définir un nouveau modèle de contours déformables ; « la trajectoire déformable ». Le contour n'est pas assimilé à un corps élastique qui se déforme dans un milieu visqueux, mais il est représenté par la trajectoire d'un rayon lumineux qui se propage dans l'image.

### 5.1 Indice de réfraction

L'image est assimilée à un milieu de propagation de la lumière. L'intensité des niveaux de gris est alors liée à l'indice de réfraction qui caractérise ce milieu. La relation qui lie les deux grandeurs est obtenue soit par

$$n(x, y) = I(x, y) \quad \text{ou} \quad n(x, y) = \text{inv}\{I(x, y)\} \quad (15)$$

où  $\text{inv}\{\}$  est une fonction des niveaux de gris. Les expressions (15) permettent de détecter de fines structures sombres ou claires sur les images en niveaux de gris. Soit par l'intermédiaire du gradient de l'image, par exemple

$$n(x, y) = \frac{1}{1 + |\nabla I(x, y)|} \quad (16)$$

de manière à doter les régions de contours de valeurs faibles de l'indice de réfraction.

### 5.2 Mise en œuvre algorithmique

La mise en œuvre algorithmique adoptée est similaire à celle décrite dans [9], une description détaillée peut-être trouvée dans [10]. La convergence de l'algorithme est assurée étant donné que la configuration des points sur le contour n'est modifiée que si le temps de parcours total peut être réduit sur une nouvelle configuration dans la fenêtre d'analyse. Le temps de parcours est donc une fonction monotone décroissante du nombre d'itérations. La convergence de l'algorithme est normalement obtenue lorsque tous les points de la trajectoire se stabilisent sur une position donnée. En réalité, pour assurer cette convergence la stabilité est reconnue lorsque le déplacement moyen de tous les points ou que la variation du temps de parcours entre deux itérations ne dépasse pas un seuil donné. Ce critère d'arrêt permet de pallier le problème d'éventuelles oscillations de la trajectoire autour de la solution.

## 6 Résultats et discussion

Cette section est illustrée d'un certain nombre de résultats de détection de contours, ouverts ou fermés, ou de structures particulières sur des images synthétiques et réelles. De plus, nous montrerons de quelle manière la définition de l'indice de réfraction permet de contrôler la régularité de la trajectoire de Fermat.

## 6.1 Exemples de détections

Dans cette section, les résultats sont obtenus à partir d'une mise à l'échelle des valeurs de l'indice de réfraction dans l'intervalle [1, 2].

Le premier résultat est obtenu sur une image synthétique représentant un cercle sur un fond composé d'éléments de contours (image 256x256 pixels). Les résultats illustrés sur la figure 1 sont obtenus pour deux valeurs du paramètre  $m$  (colonne de gauche) et différentes valeurs du niveau de bruit gaussien (colonne de droite) ajouté à l'image originale.

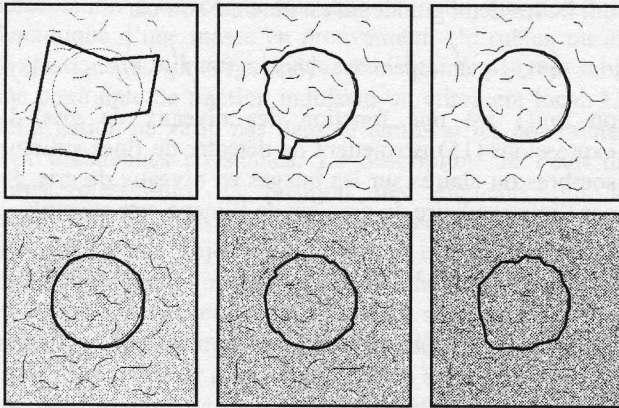


Figure 1.- Détection sur une image synthétique. Première ligne, contour initial et résultats obtenus respectivement pour  $m=2$  (au centre) et  $m=4$  (à droite). Dernière ligne, détections ( $m=4$ ) en présence de bruit pour une variance de 0,1 (à gauche), 0,35 (au centre) et 0,7 (à droite).

Le contour initial figuré sur l'image originale est constitué de 64 points régulièrement espacés le long de la trajectoire fermée. Pour  $m=2$ , la trajectoire reste accrochée, après convergence, sur des éléments de contours non significatifs. Une légère augmentation de la taille de la fenêtre d'analyse ( $m=4$ ) permet à la trajectoire de se déformer pour venir épouser approximativement le cercle. Dans le cas d'une image dégradée, l'algorithme montre une bonne robustesse au bruit. Les résultats obtenus, pour des variances égales à 0,1, 0,35 et 0,7, sont satisfaisant même pour un fort niveau de bruit.

Le second exemple porte sur la détection de fines structures sur des images d'angiographie rétinienne. A partir d'une trajectoire initiale ouverte, on cherche à détecter les vaisseaux qui apparaissent plus clairs que le reste de l'image (figure 2). Les valeurs de l'indice de réfraction sont obtenues à l'aide de l'équation 16 appliquée sur les niveaux de gris de l'image originale.

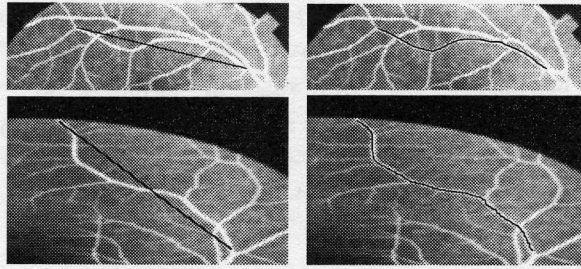


Figure 2.- Détection de structures linéaires. A gauche, trajectoires initiales. A droite, résultat de la détection des vaisseaux après respectivement 30 et 34 itérations, pour une valeur de  $m=2$ .

Le troisième exemple illustre également la détection d'un contour à partir d'une trajectoire fermée initialisée sur une image échographique du cœur (coupe transversale), figure 3. La trajectoire initiale est constituée de 128 points. Les valeurs de l'indice de réfraction sont données par l'équation 16 appliquée sur les niveaux de gris de l'image originale. Le résultat montre la stabilisation de la trajectoire sur la paroi du myocarde.

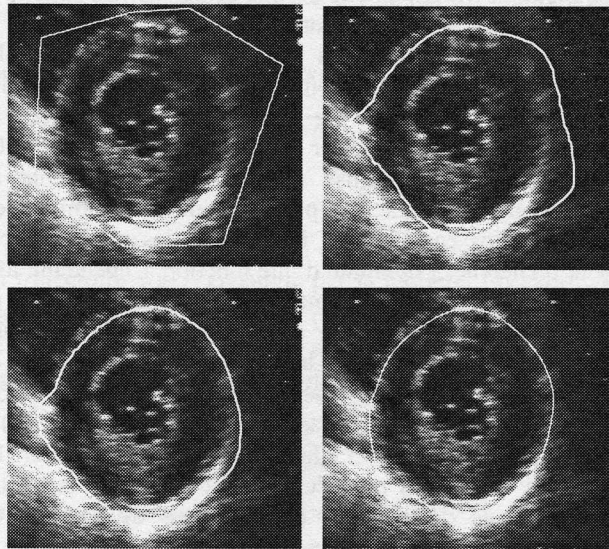


Figure 3.- Résultat de la détection sur l'image échographique du cœur. Contour initial et évolution du contour respectivement après 15, 35 et 42 itérations (avec  $m=2$ ).

Le quatrième exemple porte sur la détection du ventricule gauche sur une image échographique (coupe longitudinale, 4 cavités). Le contour initial est positionner de part et d'autre du contour recherché (figure 4). La convergence est obtenue après 27 itérations.

Le dernier exemple montre le résultat de la détection d'une cellule musculaire (figure 5). L'indice de réfraction est calculé à partir de la norme du gradient inversée. La taille de la fenêtre d'analyse est fixée à la valeur  $m=2$  et le

résultat final est obtenu après 29 itérations de l'algorithme. La trajectoire est initialisée par une forme rectangulaire placée de part et d'autre des contours de la cellule. L'évolution de cette trajectoire est illustrée sur la figure 5 aux itérations 5, 15 et 29.

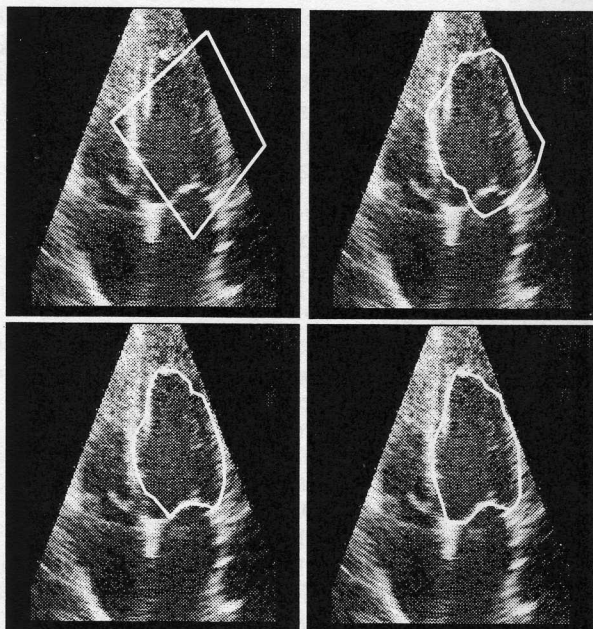


Figure 4.- Résultat de la détection sur l'image échographique du cœur. Contour initial et évolution du contour respectivement après 5, 15 et 27 itérations (avec  $m=2$ ).

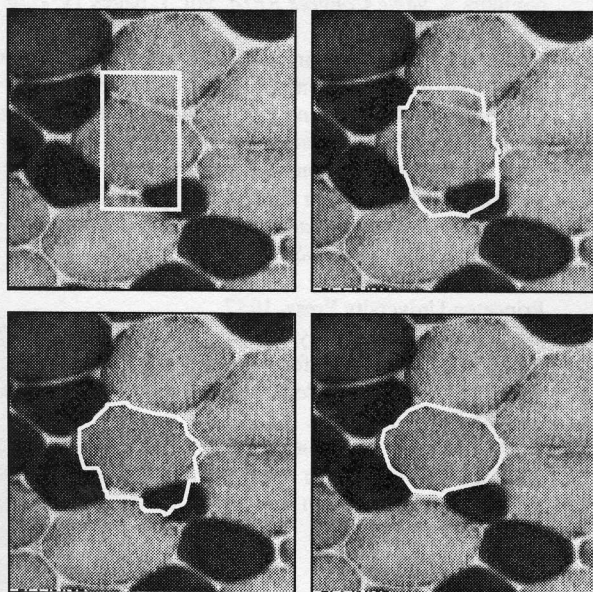


Figure 5.- Résultat de la détection sur une cellule musculaire. Première ligne, contour initial reporté respectivement sur l'image originale et sur l'image du gradient inversé. Lignes suivantes, évolution du contour aux itérations 5, 15 et 29 (avec  $m=2$ ).

## 7 Similitudes avec les contours géodésiques

Le terme de régularisation introduit dans le modèle des contours géodésiques permet de contrôler le lissage de la courbe. Il est intrinsèque aux données. Le formalisme de l'approche géodésique étant identique à celui de l'approche que nous proposons, nous donnons dans ce qui suit une interprétation physique de la régularisation au travers du principe de Fermat. Dans la section précédente la définition de l'indice de réfraction comme fonction des niveaux de gris ou des valeurs du gradient de l'image est donnée par les équations (24) et (25). Mais qu'en est-il de l'influence de l'échelle des valeurs de l'indice de réfraction  $n$  ainsi obtenues sur le résultat final ? En effet, bien que l'expression du temps de parcours (équation 3) montre que la trajectoire est invariante par changement d'échelle des valeurs de  $n$ , il n'en demeure pas moins que dans l'expression de l'EDP associée à cette trajectoire (équation 9) la valeur du rapport entre  $n$  et ces variations (suivant  $x$  ou  $y$ ) influe sur la solution finale. Nous proposons donc de définir un nouvel indice de réfraction de la manière suivante

$$n(x, y) = n_0 + \Delta n(x, y) \quad (16)$$

où  $\Delta n$  est obtenu à l'aide des équations (15) ou (16) et normalisé ( $\Delta n \in [0, 1]$ ).  $n_0$  est un *offset* à valeur constante pour tous les pixels de l'image. De la sorte, l'équation (6) devient

$$T = \frac{1}{c} \int_A^B (n_0 + \Delta n) ds = \frac{n_0}{c} \int_A^B ds + \frac{1}{c} \int_A^B \Delta n ds \quad (17)$$

Le temps de parcours total est donc la somme du temps de parcours de la lumière dans un milieu d'indice de réfraction homogène  $n_0$  et du temps de parcours de la lumière dans un milieu non homogène. Or dans le milieu homogène, nous savons que la trajectoire de Fermat est une droite alors que pour le milieu non homogène la courbure en un point de cette trajectoire dépend de la variation relative de l'indice de réfraction. Par analogie avec la théorie des fibres optiques à gradient d'indice, nous pouvons considérer dans ce cas l'image comme un milieu initialement homogène (à valeur  $n_0$ ) « dopé par diffusion » de manière à augmenter l'indice de réfraction dans les régions dépourvues de contours. La courbure de la trajectoire de Fermat est alors fonction de la variation relative de l'indice de réfraction. En d'autres termes, la régularité de la trajectoire est contrôlée par la valeur  $n_0$ . La figure 6 illustre l'influence du paramètre de régularisation  $n_0$  sur le résultat final ( $n_0$  est respectivement fixé aux valeurs 0.01, 1, 2 et 3). L'augmentation de  $n_0$  a pour conséquence une augmentation de la régularité de la trajectoire.

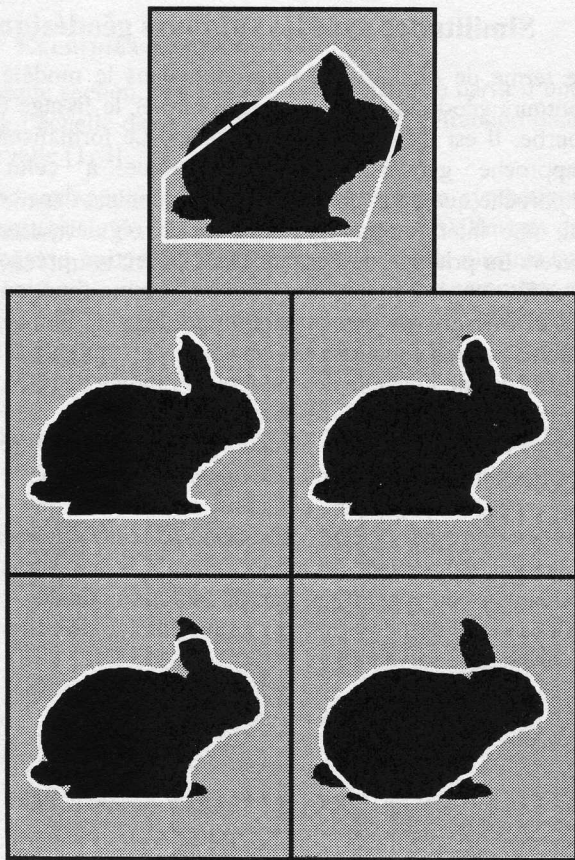


Figure 6.- Modification de la régularité de la trajectoire de Fermat par accroissement de la valeur minimale  $n_0$  de l'indice de réfraction. De haut en bas et de gauche à droite, image du lapin avec trajectoire initiale et trajectoire finales obtenues pour les valeurs respectives de  $n_0=0.01, 1, 2$  et  $3$ .

Nous avons montré, [10], que sur le domaine  $D$  de l'image, la courbure  $\kappa$  du contour final est contrôlée par une valeur maximale telle que

$$|\kappa| \leq \frac{\sup_D \{ \|\nabla(\Delta n)\| \}}{n_0 + \inf_D \{ \Delta n \}} = \frac{1}{n_0} \quad (18)$$

## 8 Conclusion

Nous avons considéré l'image comme un milieu non homogène de propagation de la lumière. Ce milieu est doté d'un indice de réfraction dont les valeurs dépendent des valeurs des niveaux de gris ou du gradient de l'image. Le modèle est fondé sur le principe de Fermat pour estimer la trajectoire de la lumière entre deux points choisis parmi les pixels de l'image. Une trajectoire initiale (ouverte ou fermée) est déformée au cours d'une procédure de minimisation qui tend à estimer la trajectoire de temps de parcours minimum. Un algorithme élaboré sur le principe de la programmation dynamique est utilisé pour résoudre ce problème. L'ensemble du traitement est faiblement paramétré et les différents résultats obtenus indiquent une

bonne robustesse au bruit et montrent que le modèle est adapté à une grande variété d'images. Bien que totalement différentes, les deux approches « contour géodésique » et « trajectoire déformable » aboutissent au même formalisme. Pour la première, partant du modèle mécanique classique les auteurs [7] proposent un modèle qui est fondé sur la recherche d'un chemin d'action minimale et qui perd toute analogie avec le principe physique initial. L'approche présentée ici est fondée sur un principe optique, le temps de parcours et le terme de régularisation y trouvent un sens physique.

## Bibliographie

- [1] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos, "Snakes : Active contour models", *Int. J. Comput. Vision*, vol. 1, no 4, pp. 321-331, 1988.
- [2] L. D. Cohen, "On active contour models and balloons", *Comput. Vision Graphics Image Processing : Image Understanding*, vol. 53, pp. 211-218, Mar. 1991.
- [3] R. Samadani, "Adaptative snakes : Control of damping and material parameters", in *Proc. SPIE Conf. Geometric Methods Comput. Vision '91*, (San Diego, CA), pp. 202-213, vol. SPIE-1570, July 1991.
- [4] E. Maurincomme, D. Friboulet, G. Finet, I. E. Magnin, and J. H. C. Reiber, "ADDER : A snake-based segmentation approach for intravascular ultrasound images", in *Conf. Proc. DICTA-93 : Digital Image Computing, Techniques and Applications*, edited by K. K. Fung and A. Ginige, Sydney, pp. 422-429, Australia, Dec. 1993.
- [5] S. Djeziri, E. Petit et J. Lemoine, « Un algorithme de croissance de région par déformation géométrique de contours », *9ème Congrès RFIA*, vol. 1, pages 715-720, 11-14 janvier 1994.
- [6] B. Leroy, I.L. Herlin, and L.D. Cohen, "Multi-resolution algorithms for active contour models", in *Proc. of the 12<sup>th</sup> Int. Conf. On Analysis and Optimization of Systems Images, Wavelets and PDE'S*, Rocquencourt, France, 1996.
- [7] L.D. Cohen, and R. Kimmel, "Minimum for active contour models : a minimal path approach", in *IEEE Int. Conf. On Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'96)*, San Fransisco, California, USA, June 16-21 1996.
- [8] R. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton, NJ : Princeton University Press, 1957.
- [9] A. A. Amini, T. E. Weymouth, and R. C. Jain, "Using dynamic programming for solving variational problems in vision", *IEEE Trans. Patt. Anal. Machine Intell.*, vol. 12, pp. 855-867, Sept. 1990.
- [10] E. Deléchelle, J. Lemoine, « La trajectoire déformable : un modèle de variété active fondé sur le principe de Fermat », soumis pour publication à la revue *Traitement du Signal*, GRETSI, France.