

# Filtrage Morphologique de Représentations par Triangulation de Delaunay

Nicolas Loménie(1)    Laurent Gallo(2)    Nicole Cambou(2)    Georges Stamon(1)

(1)Laboratoire des Systèmes Intelligents de Perception, CRIP5, Université René Descartes, Paris  
(2)Aérospatiale-Matra, Châtillon, France

## Abstract

*In most robotic applications, 3D reconstruction problem of obstacles and navigable areas consists in triangulating point set obtained by stereoscopic vision, and then in sculpting its shape using its Delaunay triangulation. Algorithms are presented which allow to perform morphological transformations on unorganised point sets represented by their Delaunay triangulations. The results show that these algorithms could behave as morphological operators such as erosion, dilatation, opening do. As a matter of fact, they actually act as "shape filter".*

Dans une application de robotique mobile, le problème de la reconstruction 3D des obstacles et des parties navigables revient le plus souvent à trianguler l'ensemble des points obtenus par vision stéréoscopique appartenant à un même objet, puis à sculpter sa forme à partir d'une triangulation de Delaunay. Dans cet article, nous présentons des algorithmes qui permettent d'opérer des transformations morphologiques sur des ensembles de points désorganisés représentés par leur triangulation de Delaunay. Comme le montrent les résultats obtenus, de tels opérateurs agissent à la manière des opérateurs de morphologie mathématique classique tel que l'érosion, la dilatation ou l'ouverture, en tant que "filtre de formes".

## 1 Introduction

Les applications informatiques traitent souvent des données se présentant sous la forme abstraite d'un nuage de points en deux ou trois dimensions, et il est quelquefois utile de pouvoir calculer ce qu'on pourrait appeler la "forme d'un tel ensemble". C'est notamment le cas dans des problèmes de reconstruction stéréoscopique où les scènes sont disponibles sous la forme de nuages de points 3D qu'il s'agit d'analyser en termes d'obstacles et de zones navigables puis de reconstruire objet par objet sous la forme de structures géométriques descriptives et le plus habituellement à partir de triangulations de Delaunay.

Le problème de la segmentation de tels nuages de points désorganisés a déjà été abordé dans [1] où l'on utilise des techniques de regroupement flou s'inspirant des nuées dynamiques [2][3] et améliorées dans [4] pour prendre en compte la forme des ensembles en cours de constitution. Cette démarche permet d'obtenir des ensembles de points sensés représenter les objets de la scène. La description de la forme de ces objets constitue alors le dernier traitement à opérer pour décrire la scène.

L'utilisation des  $\alpha$ -formes 2D ou 3D introduites au départ par H. Edelsbrunner [5] donne une définition formelle de la forme d'un ensemble de points. Ces structures construisent les formes en "sculptant" les triangulations de Delaunay associées mais de façon plus formelle que les techniques préconisées dans [6]. Or, le manque de précision dans la reconstruction des points 3D, imposé à la fois par des préoccupations de temps-réel en vision par ordinateur et par les limites technologiques actuelles des calculateurs ne permet pas de prétendre reconstruire très précisément la forme 3D des ensembles de points segmentés. Ainsi, il est suffisant de reconstruire une approximation de la silhouette 2D des objets par projection des nuages de points sur les plans d'approximation optimaux au sens des moindres carrés médians par exemple. C'est la raison pour laquelle nous nous limitons dans cet exposé à la description d'opérateurs de forme sur des ensembles de points 2D désorganisés. Après avoir expliqué ce qu'est une  $\alpha$ -forme et comment on l'obtient dans la section 2, la section 3 définit les opérateurs d' $\alpha$ -érosion,  $\alpha$ -dilatation et  $\alpha$ -ouverture tandis que la section 4 illustre leurs comportements similaires aux opérateurs de morphologie mathématique classique, au sens où ils filtrent les formes traitées. Enfin, la section 5 conclut avec l'espoir d'une théorie unifiée.

## 2 $\alpha$ -Objets

Nous commençons par expliquer ce que sont une  $\alpha$ -forme et ses dérivés et comment toutes ces structures sont obtenues [7].

D'abord introduite par Edelsbrunner, la notion d' $\alpha$ -

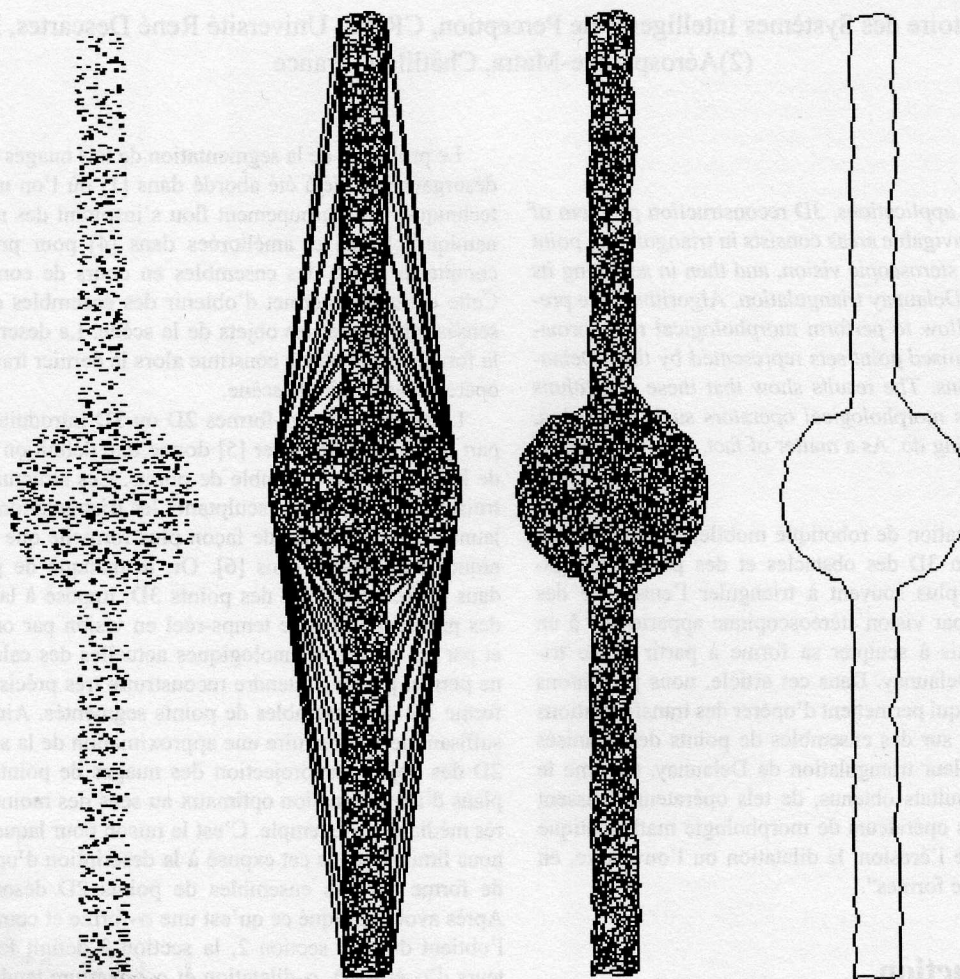


Figure 1: De la gauche vers la droite : Ensemble de points initial ; Triangulation de Delaunay ; 0.1-complexe ; 0.1-forme (intérieur) ; 0.1-enveloppe (frontière)

forme donne une définition formelle de ce que peut être la forme d'un nuage de points. Plus précisément, elle définit une famille discrète de formes dont le niveau de détail est géré par le paramètre  $\alpha$  qui contrôle la courbure maximale autorisée dans la description de la forme. Nous nous concentrons sur la structure dérivée dite  $\alpha$ -complexe d'un ensemble de points  $S$  qui peut être vue comme une triangulation de l'intérieur de l' $\alpha$ -forme correspondante et qui peut être également définie comme un sous-graphe de la triangulation de Delaunay  $Del$  de  $S$ . Intuitivement, une fois la triangulation de Delaunay obtenue [8][9], l' $\alpha$ -complexe agit comme une gomme sphérique effaçant les triangles de  $Del$  capable de recevoir une boule ouverte  $B_\alpha$  de rayon  $\alpha$  ne contenant aucun point de  $S$ . Très liée à la notion d' $\alpha$ -forme et d' $\alpha$ -complexe, l' $\alpha$ -enveloppe d'un ensemble de points est une généralisation de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points. La figure 1 résume toutes ces structures pour un nuage de points 2D désorganisé et synthétique.

Définissons une boule vide  $\alpha$ -boule comme une boule de rayon  $\alpha$  ne contenant aucun point de  $S$ . Alors, l' $\alpha$ -forme de  $S$  est définie comme le complémentaire de la réunion de toutes les  $\alpha$ -boules. Or, la morphologie mathématique est bien connue pour ses relations ensemblistes : " $B \subset S$ ", " $B \cap S = \emptyset$ " où  $S$  est l'ensemble à analyser et  $B$  est l'élément structurant dont la forme dépend des besoins de l'analyse. En effet, ces relations constituent la base des opérateurs de morphologie mathématique classique tels que l'érosion et la dilatation. Mais les définitions sont assez différentes même si les  $\alpha$ -complexes semblent effectivement éroder l' $\infty$ -complexe correspondant à l'enveloppe convexe (fig.1). Définissons les  $k$ -simplexes  $\sigma_T = conv(T)$  (c'est-à-dire l'enveloppe convexe de  $T$ ), avec  $T \subseteq S$  et  $|T| = k + 1$  pour  $0 \leq k \leq 2$ . Définissons  $\rho_T$  comme le rayon de la sphère circonscrite à  $\sigma_T$ . Pour chaque simplexe  $\sigma_T \in Del$  il existe un unique intervalle tel que  $\sigma_T$  soit une face de l' $\alpha$ -forme  $F_\alpha$  si et seulement si  $\alpha$  appartient à cet intervalle. Soit  $up(\sigma_T)$  l'ensemble de toutes les faces incidentes à  $\sigma_T$  dont la dimension est supérieure de un à celle de  $\sigma_T$ , c'est-à-dire  $up(\sigma_T) = \{\sigma_{T'} \in Del \mid T \subset T' \text{ et } |T'| = |T| + 1\}$ . Alors, pour chaque  $\sigma_T$ , on dérive deux valeurs  $\lambda_T$  et  $\mu_T$  :

$$\begin{cases} \text{si } |T| = 3, & \lambda_T = \mu_T = \rho_T \\ & \lambda_T = \min(\{\lambda_{T'} \mid \sigma_{T'} \in up(\sigma_T)\}) \\ \text{sinon} & \text{et} \\ & \mu_T = \max(\{\mu_{T'} \mid \sigma_{T'} \in up(\sigma_T)\}) \end{cases}$$

Enfin, un simplexe est dit :

$$\begin{cases} \text{Intérieur} & \text{si } \sigma_T \notin \partial F_\alpha \\ \text{Régulier} & \text{si } \sigma_T \in \partial F_\alpha \text{ en bornant un simplexe} \\ & \text{de dimension supérieure dans } C_\alpha \\ \text{Singulier} & \text{si } \sigma_T \notin \partial F_\alpha \text{ sans border un simplexe} \\ & \text{de dimension supérieure dans } C_\alpha \end{cases}$$

Alors, le tableau 1 explique comment construire les  $\alpha$ -objets.

$\sigma_T$ est...	Singulier	Régulier	Intérieur
Triangle			$(\rho_T, \infty[$
Arête, $\notin \partial conv(S)$	$(\rho_T, \lambda_T)$	$(\lambda_T, \mu_T)$	$(\mu_T, \infty[$
$\in \partial conv(S)$	$(\rho_T, \lambda_T)$	$(\lambda_T, \infty[$	
Sommet, $\notin \partial conv(S)$	$[0, \lambda_T)$	$(\lambda_T, \mu_T)$	$(\mu_T, \infty[$
$\in \partial conv(S)$	$[0, \lambda_T)$	$(\lambda_T, \infty[$	

Table 1: Obtention d'une  $\alpha$ -forme

Il faut remarquer que chaque arête appartenant à  $\partial conv(S)$  est le côté d'un triangle de rayon de sphère circonscrite infini, avec un des sommets à l'infini. Théoriquement, l' $\alpha$ -complexe  $C_\alpha$  est constitué de tous les simplexes intérieurs, réguliers, et singuliers pour un  $\alpha$  donné mais on l'assimilera à l'intérieur de l' $\alpha$ -forme  $F_\alpha$  qui est triangulé seulement par les triangles intérieurs. La frontière de l' $\alpha$ -forme est formée par l'ensemble des arêtes régulières et de leurs sommets.

### 3 Erosion, Dilatation, Ouverture.

Une fois un  $\alpha$ -complexe optimal de  $S$  obtenu, par exemple celui de volume minimal et contenant tous les points de  $S$ , notre but est de définir des opérateurs morphologiques pour filtrer la forme ainsi décrite. A partir de maintenant, l' $\alpha$ -complexe est assimilé à une triangulation de l'intérieur de l' $\alpha$ -forme, c'est-à-dire à une sous-triangulation  $T_\alpha$  obtenue à partir de  $Del$ . L' $\alpha$ -érosion est définie comme un sous-graphe de  $Del$  obtenu par propagation des valeurs  $\mu_T$  aux triangles voisins. Ainsi, à chaque triangle  $conv(T)$  de  $C_\alpha$  est associé des valeurs  $e_T^k$  définies par :

$$e_T^k = \max \left\{ e_{T'}^{k-1} \mid T' \in \text{voisin}(T) \right\} \text{ et } e_T^0 = \mu_T = \rho_T$$

où  $\text{voisin}(T)$  est l'ensemble de tous les triangles  $T$  de  $Del$  partageant au moins un sommet avec le triangle  $T$ , c'est-à-dire :

$$\text{voisin}(T) = \{T' \in Del \mid T' \cap T = \emptyset \text{ et } |T'| = |T| + 1\}$$

L' $\alpha$ -érodé d'ordre  $k$  est défini comme la réunion de tous les triangles de  $C_\alpha$  pour lesquels  $e_T^k$  est inférieur à  $\alpha$ , c'est-à-dire :

$$\alpha^k - \text{érodé} = \{T' \in Del \mid e_{T'}^k < \alpha \text{ et } |T'| = 3\}$$

A partir de maintenant, toute  $\alpha$ -transformation d'ordre 1 ou  $\alpha^1$ -transformation est appelée  $\alpha$ -transformation. Il faut remarquer que dans ces conditions l' $\alpha^k$ -érodé de  $Del$  est identique à l' $\alpha$ -érodé de l' $\alpha^{k-1}$ -érodé, en remplaçant  $e_T^0$  par  $e_T^{k-1}$ . Si bien que l' $\alpha^k$ -érosion est équivalente à la réalisation de  $k$   $\alpha$ -érosions successives en propageant les valeurs  $e_T^k$ .

La dilatation de toute sous-triangulation  $T_\alpha$  de  $Del$  est définie comme la réunion de tous les triangles de  $Del$  partageant au moins un sommet avec  $T_\alpha$ . La dilatation de  $Del$  donne l'espace 2D entier.

L' $\alpha$ -ouverture d'ordre  $k$  ( $\alpha^k$ -ouverture) est définie comme le dilaté de l' $\alpha$ -érode d'ordre  $k$  de  $C_\alpha$ . Il faut noter que réaliser une  $\alpha^k$ -ouverture ne revient pas cette fois-ci à réaliser  $k$   $\alpha$ -ouvertures successives en propageant les valeurs  $e_T^k$ , mais à réaliser  $\alpha$ -érosions successives suivies d'une dilatation dans le but de filtrer le contour de la forme obtenu.

#### 4 Résultats Expérimentaux.

Les opérations d'ouverture morphologique sur un ensemble sont utilisées pour filtrer géométriquement les contours de l'objet qu'il représente. Par exemple, de petites ouvertures étroites et de petites excroissances peuvent être réduites par des opérations d'ouverture, ce qui pourrait être intéressant dans nos applications robotiques en vision stéréoscopique. En effet, le processus de segmentation de nuages de points 3D en sous-ensembles peut créer des formes planes non régulières à cause des points aberrants ou mal affectés.

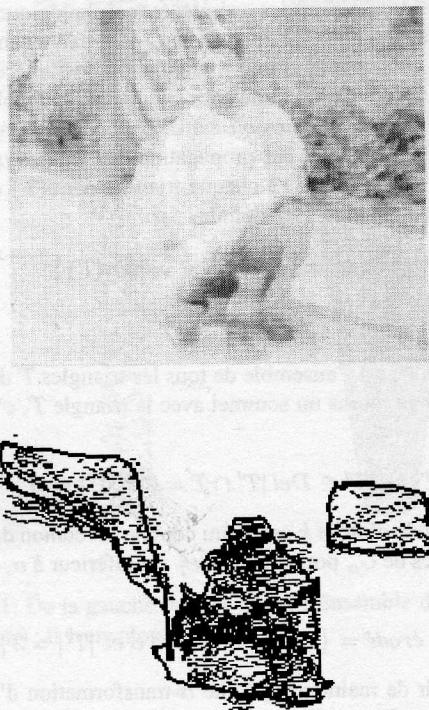


Figure 2: De haut en bas : Scène observée ; Résultat de la segmentation du nuages de points 3D représentatif de la scène à moins de 7 mètres et les  $\alpha$ -formes associées.

Par exemple, la figure 2 illustre le résultat en segmen-

tation de la scène représentant un homme accroupi et la délimitation de la forme des deux ensembles de points extraits par des  $\alpha$ -formes optimales, l'un pour le sol derrière et l'autre pour l'homme. On précise d'une part que l'image de la scène fait apparaître sur deux planches couleurs l'image droite et l'image gauche du système de stéréoscopie (d'où l'effet de flou), et que d'autre part on ne retient que les points reconstruits situés à moins de 7 mètres de distance à cause de la faible précision en reconstruction. On constate encore que l' $\alpha$ -forme optimale représentant le sol sépare correctement les deux parties du sol. Le paramètre  $\alpha$  vaut 0.4 pour cette dernière  $\alpha$ -forme. L'application d'une 0.4-ouverture sur l'ensemble de points représentant le sol permet d'éliminer l'excroissance du bas (figure 4).

La figure 5 montre plus précisément comment la petite excroissance en bas de la forme est ainsi effacée en faisant apparaître superposés le 0.4-complexe, le 0.4-érode, et le 0.4-ouvert sachant que :

$$\alpha - \text{erodé} \subset \alpha - \text{ouvert} \subset \alpha - \text{complexe}$$

Il peut être parfois utile de faire des mesures sur des parties constitutives d'un objet. Dans ce but, ce dernier doit être segmenté en ses différentes parties constitutives. La morphologie mathématique peut alors utiliser des érosions successives pour obtenir des germes pour chaque partie et réaliser alors une dilatation géodésique de ces derniers (il suffit de penser à la séparation de poumons en imagerie médicale). Le même type de transformations peut être réalisé sur les deux cercles liés de la Figure 3. En appliquant une  $\alpha$ -ouverture d'ordre 7, et en dilatant ensuite géodésiquement parallèlement les deux germes obtenus à l'intérieur de l' $\alpha$ -complexe et en empêchant qu'un triangle n'appartienne à deux germes dilatés différents, on obtient les deux cercles segmentés Figure 3.

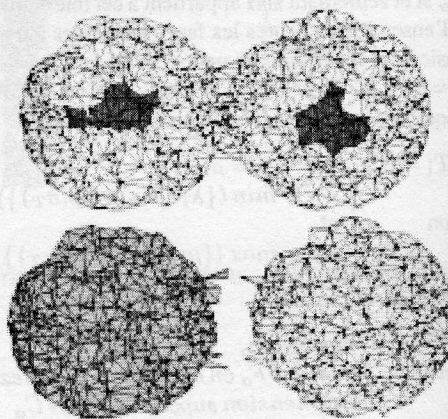


Figure 3: De haut en bas : 0.8-ouverture d'ordre 7 ; Dilatation géodésique des deux germes

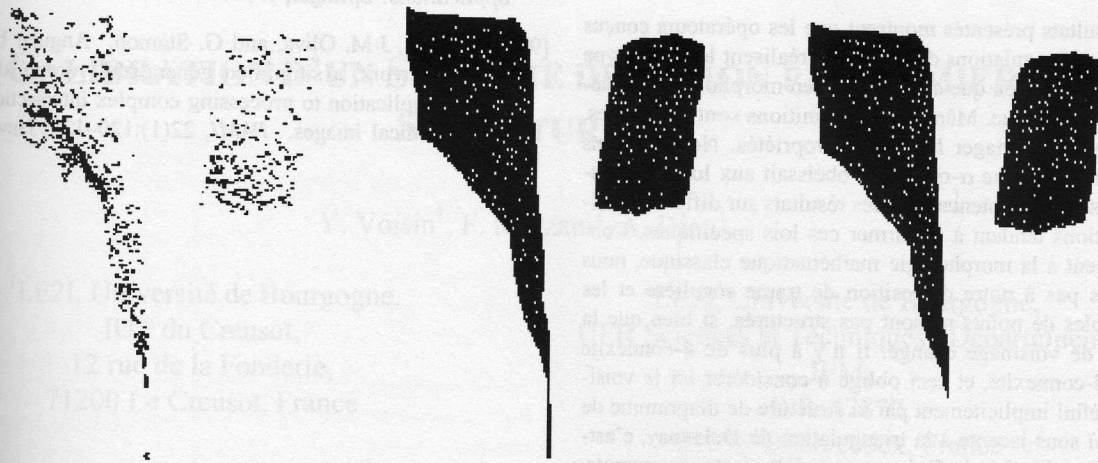


Figure 4: De gauche à droite : Ensemble de points initial ; 0.1-complex ; 0.1-ouverture

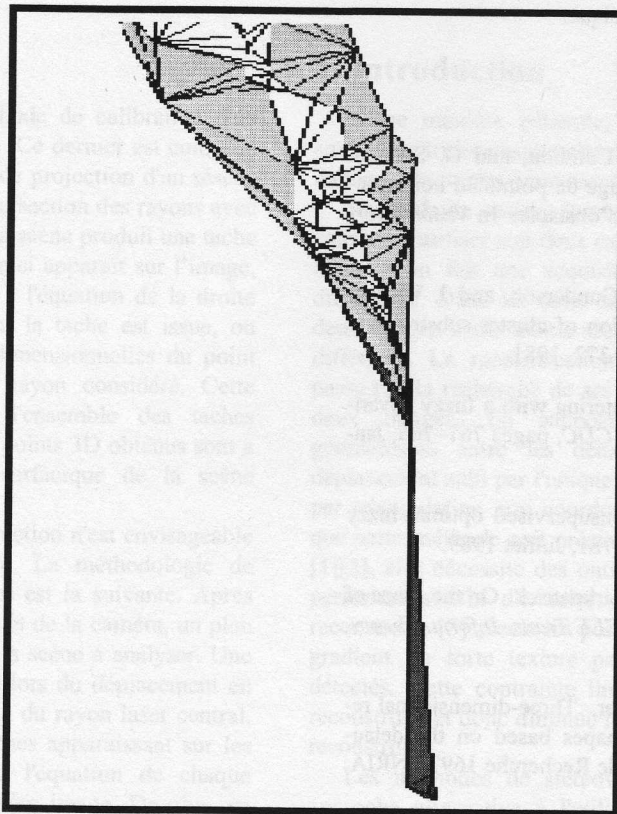


Figure 5: Détails superposés de la 0.1-ouverture : en blanc le 0.1-érodé, en gris le 0.1-ouvert, et en noir le 0.1-complexe.

## 5 Discussion et Perspectives.

Les résultats présentés montrent que les opérateurs conçus pour les triangulations de Delaunay réalisent le même type de transformation que ceux utilisés en morphologie mathématique classique. Même si les définitions sont différentes, ils semblent partager les mêmes propriétés. Nous n'avons pas prouvé qu'une  $\alpha$ -ouverture obéissait aux lois de croissance et d'idempotence mais les résultats sur différentes triangulations tendent à confirmer ces lois spécifiques. Contrairement à la morphologie mathématique classique, nous n'avons pas à notre disposition de trame régulière et les ensembles de points ne sont pas structurés, si bien que la notion de voisinage change. Il n'y a plus de 4-connexité ni de 8-connexité, et ceci oblige à considérer ici le voisinage défini implicitement par la structure de diagramme de Voronoï sous-jacente à la triangulation de Delaunay, c'est-à-dire les triangles de *Del* en tant qu'éléments structurants. Ceci empêche d'adapter la forme de l'élément structurant alors que c'est un point essentiel en morphologie mathématique. Nous aimerions maintenant étendre ces opérateurs à des triangulations de Delaunay en dimension trois, et tenter de pousser plus avant la comparaison avec les opérateurs de morphologie mathématique classique.

## References

- [1] N. Loménie, L. Gallo, N. Cambou, and G. Stamon. Structuration plane d'un nuage de points 3d non structuré et détection des zones d'obstacle. In *Vision Interface*, pages 164–171, 1999.
- [2] J.C. Bezdec, C. Coray, R. Gunderson, and J. Watson. Detection and characterisation of cluster substructure. *SIAM J.Appl.Math.*, 40:339–372, 1981.
- [3] D.E. Gustafson. Fuzzy clustering with a fuzzy covariance matrix. In *proc. IEEE CDC*, pages 761–766, Janvier 1979.
- [4] I. Gath and A.B. Geva. Unsupervised optimal fuzzy clustering. *PAMI*, 2(7):773–781, Juillet 1989.
- [5] H. Edelsbrunner and D.G. Kirkpatrick. On the shape of set of points in the plane. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 29:551–559, 1983.
- [6] J.D. Boissonat and B. Geiger. Three-dimensionnal reconstruction of complex shapes based on the delaunay triangulation. Rapport de Recherche 1697, INRIA, Sofia Antipolis, Avril 1992.
- [7] H. Edelsbrunner and E.P. Mücke. Three-dimensionnal alpha-shapes. *ACM Transactions on Graphics*, 13(1):43–72, 1994.
- [8] M. de Berg. *Computational geometry : algorithms and applications*. Springer, 1997.
- [9] F. Cloppet, J-M. Oliva, and G. Stamon. Angular bisector network, a simplified generalized voronoï diagram : application to processing complex intersections in biomedical images. *PAMI*, 22(1):120–128, Janvier 2000.